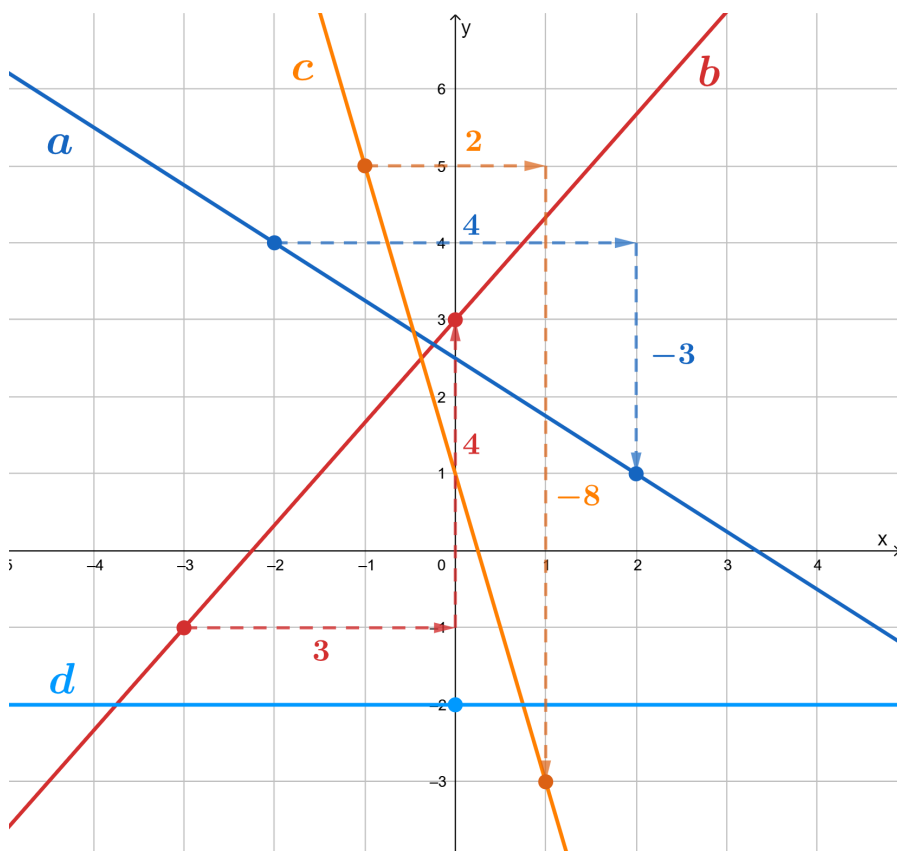


# K1



Valitaan suoralta kaksi pistettä, joiden koordinaatit ovat helposti luettavissa. Lasketaan ruudukon avulla koordinaattien muutokset. Lasketaan suorien kulmakertoimet.

**Suora *a***

$$k_a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

### Suora *b*

$$k_b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$$

### Suora *c*

$$k_c = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{2} = -4$$

### Suora *d*

Suora on  $x$ -akselin suuntainen, eli vaakasuora. Sen kulmakerroin on  $0$ .

### Vastaus

suora *a*:  $k = -\frac{3}{4}$ , suora *b*:  $k = \frac{4}{3}$ ,

suora *c*:  $k = -4$ , suora *d*:  $k = 0$

## K2

- a) Lasketaan pisteiden (4, 2) ja (1, 8) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{8 - 2}{1 - 4} = \frac{6}{-3} = -2$$

Sijoitetaan  $y_2 = 8$ ,  $y_1 = 2$ ,  
 $x_2 = 1$  ja  $x_1 = 4$ .

Kulmakerroin on negatiivinen, joten suora on laskeva.

- b) Lasketaan pisteiden (-1, -5) ja (2, 7) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{7 - (-5)}{2 - (-1)} = \frac{12}{3} = 4$$

Sijoitetaan  $y_2 = 7$ ,  $y_1 = -5$ ,  
 $x_2 = 2$  ja  $x_1 = -1$ .

Kulmakerroin on positiivinen, joten suora on nouseva.

- c) Lasketaan pisteiden (6, 3) ja (1, 3) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - 3}{1 - 6} = \frac{0}{-5} = 0$$

Sijoitetaan  $y_2 = 3$ ,  $y_1 = 3$ ,  
 $x_2 = 1$  ja  $x_1 = 6$ .

Kulmakerroin on 0, joten suora on vaakasuora.

### Vastaus

- a)  $k = -2$ , suora on laskeva  
b)  $k = 4$ , suora on nouseva  
c)  $k = 0$ , suora on vaakasuora

## K3

Suoran  $y = kx + s$  kulmakerroin on  $k$  ja se leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, s)$ .

- a) Suoran  $y = -x + 6$  kulmakerroin on  $-1$ .
- b) Suora  $y = -x + 6$  leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 6)$ .
- c) Piste on suoralla täsmälleen silloin, kun sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

Tutkitaan, toteuttaako piste  $(1, 4)$  suoran yhtälön.

$$y = -x + 6$$

$$4 = -1 + 6$$

$$4 = 5$$

epätosi

Sijoitetaan  $y = 4$  ja  $x = 1$ .

Sievennetään oikea puoli.

Yhtälö ei toteudu, joten piste  $(1, 4)$  ei ole suoralla.

### Vastaus

d)  $k = -1$

e)  $(0, 6)$

f) ei ole

## K4

Suoran  $y = kx + s$  kulmakerroin on  $k$  ja se leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, s)$ .

- a) Suoran kulmakerroin on  $-\frac{1}{3}$  ja se leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 7)$ . Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y = kx + s$$

Sijoitetaan  $k = -\frac{1}{3}$  ja  $s = 7$ .

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

- b) Ratkaistaan suoran  $y = -\frac{1}{3}x + 7$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

Sijoitetaan  $y = 0$  ja ratkaistaan  $x$ .

$$0 = -\frac{1}{3}x + 7 \quad | +\frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{3}x = 7 \quad | \cdot 3$$

$$x = 21$$

Leikkauspiste on  $(21, 0)$ .

### Vastaus

g)  $y = -\frac{1}{3}x + 7$

h)  $(21, 0)$

## K5

- a) Suora kulkee origon eli pisteen  $(0, 0)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $4$ . Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y_0 = 0, k = 4 \text{ ja } x_0 = 0$$

$$y - 0 = 4(x - 0)$$

$$y = 4x$$

- b) Suora kulkee pisteen  $(-6, -1)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $-\frac{2}{3}$ . Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y_0 = -1, k = -\frac{2}{3} \text{ ja } x_0 = -6$$

$$y - (-1) = -\frac{2}{3}(x - (-6))$$

$$y + 1 = -\frac{2}{3}(x + 6)$$

$$y + 1 = -\frac{2}{3}x - 4 \quad | -1$$

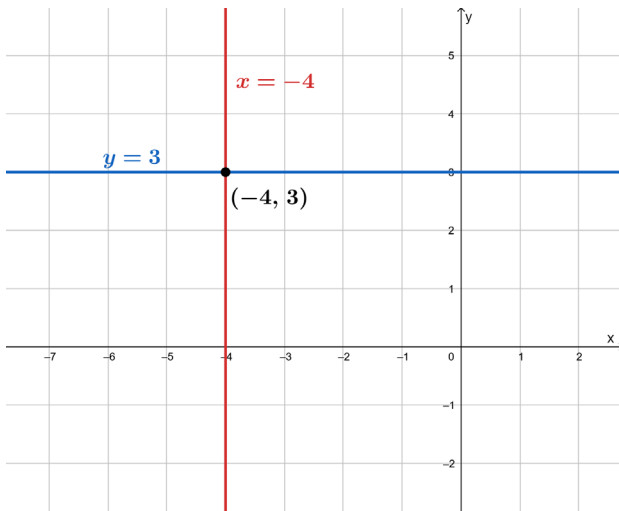
$$y = -\frac{2}{3}x - 5$$

### Vastaus

i)  $y = 4x$

j)  $y = -\frac{2}{3}x - 5$

## K6



- a) Suoran kulkee pisteen  $(-4, 3)$  kautta ja on  $x$ -akselin suuntainen (eli vaakasuora).

Suoran jokaisen pisteen  $y$ -koordinaatti on 3.

Suoran yhtälö on  $y = 3$ .

- b) Suoran kulkee pisteen  $(-4, 3)$  kautta ja on  $y$ -akselin suuntainen (eli pystysuora).

Suoran jokaisen pisteen  $x$ -koordinaatti on  $-4$ .

Suoran yhtälö on  $x = -4$ .

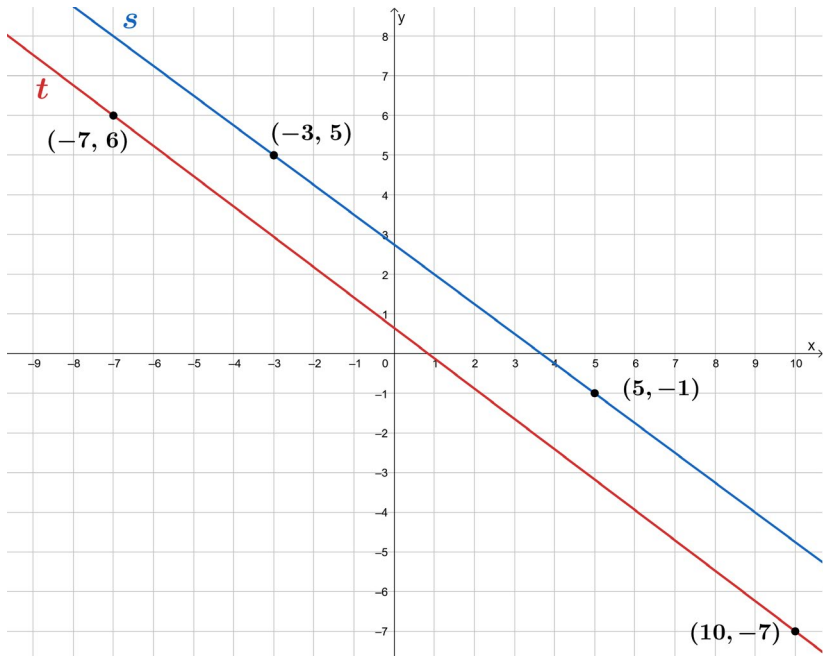
### Vastaus

k)  $y = 3$

l)  $x = -4$

## K7

- a) Merkitään annetut pisteet koordinaatistoon syöttämällä geometriaohjelmaan niiden koordinaatit. Piirretään pisteiden kautta kulkevat suorat  $s$  ja  $t$ .



Kuvan perusteella suorat vaikuttavat olevan yhdensuuntaiset. Vain laskemalla voidaan varmistua suorien yhdensuuntaisuudesta.

**b)** Lasketaan suorien kulmakertoimet ja verrataan niitä toisiinsa.

Määritetään suoran  $s$  kulmakerroin.

$$\begin{aligned}k_s &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\&= \frac{-1 - 5}{5 - (-3)} \\&= -\frac{-6}{8}^{(2)} \\&= -\frac{3}{4} (= -0,75)\end{aligned}$$

Suora  $s$  kulkee pisteiden  
 $(-3, 5)$  ja  $(5, -1)$  kautta.

Määritetään suoran  $t$  kulmakerroin.

$$\begin{aligned}k_t &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\&= \frac{-7 - 6}{10 - (-7)} \\&= \frac{-13}{17} \\&= -\frac{13}{17} (\approx -0,764)\end{aligned}$$

Suora  $t$  kulkee pisteiden  
 $(-7, 6)$  ja  $(10, -7)$  kautta.

Kulmakertoimet eivät ole yhtä suuret, joten suorat  $s$  ja  $t$  eivät ole yhdensuuntaisia.

### Vastaus

**a)** Suorat vaikuttavat olevan yhdensuuntaiset

**b)** Suorat eivät ole yhdensuuntaiset. (Kulmakertoimet  $k_s = -\frac{3}{4} = -0,75$

ja  $k_t = -\frac{13}{17} \approx -0,764$  ovat eri suuret.)

## K8

Koska suora on yhdensuuntainen suoran  $2x + y - 3 = 0$  kanssa, ovat niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Määritetään suoran  $2x + y - 3 = 0$  kulmakerroin.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0 & | -2x + 3 & \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

Suoran  $2x + y - 3 = 0$  kulmakerroin on  $-2$ .

Muodostetaan kysytyn suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) & y_0 = -1, k = -2 \text{ ja } x_0 = 4 \\ y - (-1) &= -2(x - 4) & \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\ y + 1 &= -2(x - 4) \\ y + 1 &= -2x + 8 & | -1 \\ y &= -2x + 7 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on  $y = -2x + 7$ .

Ratkaistaan suoran  $y = -2x + 7$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned} y &= -2x + 7 & \text{Sijoitetaan } y = 0 \text{ ja ratkaistaan } x. \\ 0 &= -2x + 7 & | +2x \\ 2x &= 7 & |: 2 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Suora leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(3,5; 0)$ .

Suora  $y = -2x + 7$  leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 7)$ .

### Vastaus

$y = -2x + 7$ , pisteissä  $(3,5; 0)$  ja  $(0, 7)$

## K9

- a) Lasketaan pisteiden  $(160, 40)$  ja  $(280, 10)$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$\begin{aligned} k &= \frac{10 - 40}{280 - 160} & k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-30}{120} & & \\ &= -\frac{1}{4} & & \end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen  $(280, 10)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $-\frac{1}{4}$ .  
Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - 10 &= -\frac{1}{4}(x - 280) & y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 10 &= -\frac{1}{4}x + 70 & | +10 & \\ y &= -\frac{1}{4}x + 80 & & \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on  $y = -\frac{1}{4}x + 80$ .

- b)** Piste on suoralla täsmälleen silloin, kun sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

Tutkitaan, toteuttaako piste  $(-24, 86)$  suoran yhtälön.

$$y = -\frac{1}{4}x + 80$$

Sijoitetaan  $x = -24$  ja  $y = 86$ .

$$86 = -\frac{1}{4} \cdot (-24) + 80$$

$$86 = 6 + 80$$

$$86 = 86$$

tosi

Yhtälö toteutuu, joten piste  $(-24, 86)$  on suoralla.

### Vastaus

**a)**  $y = -\frac{1}{4}x + 80$

**b)** on

## K10

- a) Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

Kerrotaan alempi yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan  $y$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ + \quad 6x + 2y = 2 \end{cases} \\ \hline 11x = 22 \quad | :11 \\ x = 2 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.  
Muuttuja  $y$  poistuu.  
Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = 2$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{r} 3x + y = 1 \\ 3 \cdot 2 + y = 1 \\ 6 + y = 1 \quad | -6 \\ y = -5 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 2$ .

Siiis  $x = 2$  ja  $y = -5$ .

- b) Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

Kerrotaan alempi yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan  $y$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x - 2y = -1 \end{cases} \\ \hline 2x = 6 \quad | : 2 \\ x = 3 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.  
Muuttuja  $y$  poistuu.  
Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = 3$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ 3 + 2y = 1 \quad | -3 \\ 2y = -2 \quad | : 2 \\ y = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 3$ .

Siis  $x = 3$  ja  $y = -1$ .

### Vastaus

a)  $x = 2$  ja  $y = -5$

b)  $x = 3$  ja  $y = -1$

## K11

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = 3x - 4. \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = 3x - 4$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{array}{rcl} y & = & x + 6 \\ 3x - 4 & = & x + 6 \quad | -x + 4 \\ 2x & = & 10 \quad | : 2 \\ x & = & 5 \end{array} \qquad \text{Sijoitetaan } y = 3x - 4.$$

Sijoitetaan  $x = 5$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{rcl} y & = & x + 6 \\ & = & 5 + 6 \\ & = & 11 \end{array} \qquad \text{Sijoitetaan } x = 5.$$

Leikkauspiste on  $(5, 11)$ .

b) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = x \\ 5x - y - 7 = 0. \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = x$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$5x - y - 7 = 0$$

Sijoitetaan  $y = x$ .

$$5x - x - 7 = 0 \quad | +7$$

$$4x = 7 \quad |:4$$

$$x = \frac{7}{4}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{7}{4}$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = x$$

Sijoitetaan  $x = \frac{7}{4}$ .

$$y = \frac{7}{4}$$

Leikkauspiste on  $(\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$ .

### Vastaus

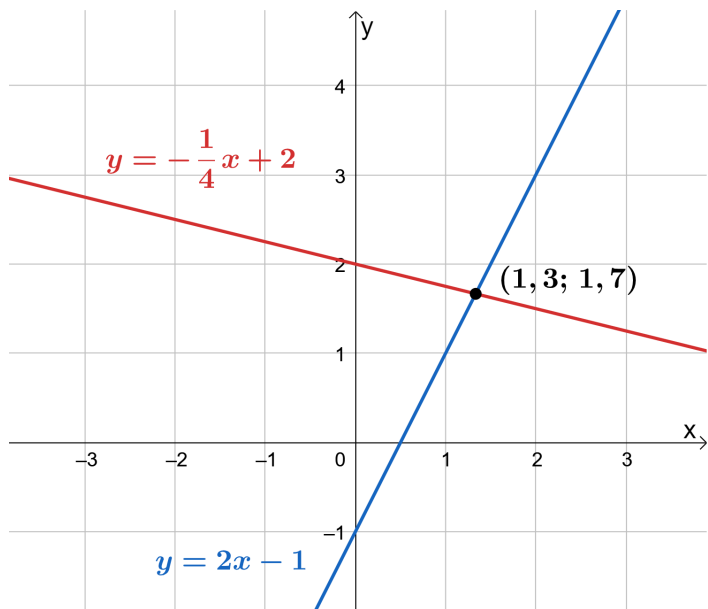
a) (5, 11)

b)  $(\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$

## K12

- a) Piirretään suorat geometriaohjelmalla syöttämällä siihen suorien yhtälöt. Määritetään ohjelmalla suorien leikkauspiste.

Leikkauspiste on  $(1,3; 1,7)$ .



**b)** Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{4}x + 2. \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = 2x - 1$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$2x - 1 = -\frac{1}{4}x + 2 \quad | +\frac{1}{4}x + 1$$

$$\frac{9}{4}x = 3 \quad | \cdot \frac{4}{9}$$

$$x = \frac{12}{9} \text{ (3)}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{4}{3}$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = 2x - 1$$

$$\text{Sijoitetaan } x = \frac{4}{3}.$$

$$y = 2 \cdot \frac{4}{3} - 1$$

$$y = \frac{8}{3} - 1$$

$$y = \frac{5}{3}$$

Leikkauspiste on  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ .

### Vastaus

**a)** (1,3; 1,7)

**b)**  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$

## K13

Merkitään tiikerikakkujen lukumäärää kirjaimella  $x$  ja pullapitkojen lukumäärää kirjaimella  $y$ .

Sokeri:

Sokeria menee tiikerikakkuun 1,5 dl, eli yhteensä  $1,5x$  (dl).

Sokeria menee pullapitkoon 1 dl, eli yhteensä  $y$  (dl).

Laurilla on 9 dl sokeria.

Jauhot:

Jauhoja menee tiikerikakkuun 200 g = 0,2 kg, eli yhteensä  $0,2x$  (kg).

Jauhoja menee pullapitkoon 800 g = 0,8 kg, eli yhteensä  $0,8x$  (kg).

Laurilla on 3,2 kg jauhoja.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} 1,5x + y = 9 \\ 0,2x + 0,8y = 3,2 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 4 \text{ ja } y = 3$$

Lauri voi leipoa 4 tiikerikakkua ja 3 pullapitkoa.

### Vastaus

4 tiikerikakkua ja 3 pullapitkoa

## K14

Merkitään 2-prosenttisen suolaliuoksen määrää  $x$  (g)

ja 9-prosenttisen suolaliuoksen määrää  $y$  (g).

Sekoitettua liuosta on 500 g.

2-prosenttisessa suolaliuoksessa on suolaa  $0,02x$  g.

9-prosenttisessa suolaliuoksessa on suolaa  $0,09x$  g.

Sekoitetussa 3-prosenttisessä liuoksessa on suolaa  $0,03 \cdot 500$  g = 15 g.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,02x + 0,09y = 15 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 429 \text{ ja } y \approx 71$$

Sekoitetaan 2-prosenttista liuosta 429 g ja 9-prosenttista liusta 71 g.

### Vastaus

2-prosenttista liuosta 429 g ja 9-prosenttista liusta 71 g

## K15

- a) Kun korkeus  $x$  kasvaa yhden yksikön (yhden kilometrin), keskilämpötila  $y$  laskee  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Keskilämpötilan  $y$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) riippuvuutta korkeudesta  $x$  (km) kuvaa suora, jonka kulmakerroin on  $-6$ .

Kun korkeus  $x = 0$  (km), keskilämpötila  $y = 14\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Suora kulkee pisteen  $(0, 14)$  kautta.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 14 = -6(x - 0)$$

$$y = -6x + 14$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$

CAS-laskimella.

Keskilämpötila on  $y = -6x + 14$ , kun korkeus on  $x$  (km).

- b) Lasketaan keskilämpötila  $y$ , kun korkeus  $x = 3,5$  (km).

$$y = -6x + 14$$

$$= -6 \cdot 3,5 + 14$$

$$= -21 + 14$$

$$= -7\text{ }(^{\circ}\text{C})$$

Sijoitetaan  $x = 3,5$ .

Keskilämpötila vuoren huipulla on  $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

c) Ratkaistaan korkeus  $x$  (km), kun keskilämpötila  $y = 0$  °C.

$$y = -6x + 14$$

$$0 = -6x + 14$$

Sijoitetaan  $y = 0$ .

Ratkaistaan muuttuja  $x$   
CAS-laskimella.

$$x \approx 2,3 \text{ (km)}$$

Keskilämpötilan nollaraja on 2,3 km korkeudella.

### Vastaus

a)  $y = -6x + 14$

b)  $-7$  °C

c) 2,3 km

## K16

Merkitään todellista nopeutta kirjaimella  $x$  ja mittarilukemaa kirjaimella  $y$ . Suureen  $y$  riippuvuutta suureesta  $x$  kuvaa suora.

Annetuista tiedoista saadaan kaksi koordinaatiston pistettä.

Todellinen nopeus $x$	Mittarilukema $y$	$(x, y)$
45	50	$(45, 50)$
90	100	$(90, 100)$

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{100 - 50}{90 - 45} = \frac{50}{45} \stackrel{\text{5}}{=} \frac{10}{9}$$

$y$ -koordinaattien erotus jaetaan  
 $x$ -koordinaattien erotuksella.

Suora kulkee pisteen  $(45, 50)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $\frac{10}{9}$ .

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 50 = \frac{10}{9}(x - 45)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$

CAS-laskimella.

$$y = \frac{10}{9}x$$

Suoran yhtälö on  $y = \frac{10}{9}x$ .

**a)** Ratkaistaan todellinen nopeus  $x$ , kun mittarilukema  $y = 80$  km/h.

$$y = \frac{10}{9}x$$

Sijoitetaan  $y = 80$ .

$$80 = \frac{10}{9}x$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 72 \text{ (km/h)}$$

Todellinen nopeus on 72 km/h.

**b)** Lasketaan mittarilukema  $y$ , kun todellinen nopeus  $x = 80$  km/h.

$$y = \frac{10}{9}x$$

Sijoitetaan  $x = 80$ .

$$y = \frac{10}{9} \cdot 80$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y = 88,888... \approx 89 \text{ (km/h)}$$

Mittari näyttää 89 km/h.

### **Vastaus**

**a)** 72 km/h

**b)** 89 km/h

## K17

Yhtiö	Perusmaksu €/kk	Yksikköhinta snt/kWh
A	4,02	6,62
B	3,75	7,99

### a) Yhtiö A:

Yhtiön A tarjoaman sähkön yksikköhinta on  
 $6,62 \text{ snt/kWh} = 0,0662 \text{ €/kWh}$ .

Sähkön kokonaishintaan kuuluu kuukaudessa yksikköhinta  $x$  kilowattitunnista, eli  $0,0662x$  €, sekä perusmaksu  $4,02$  €. Muodostetaan lauseke.

$$a(x) = 0,0662x + 4,02$$

### Yhtiö B:

Yhtiön B tarjoaman sähkön yksikköhinta on  
 $7,99 \text{ snt/kWh} = 0,0799 \text{ €/kWh}$ .

Sähkön kokonaishintaan kuuluu kuukaudessa yksikköhinta  $x$  kilowattitunnista, eli  $0,0799x$  €, sekä perusmaksu  $3,75$  €. Muodostetaan lauseke.

$$b(x) = 0,0799x + 3,75$$

- b) Kokonaishinnat ovat samat, kun  $a(x) = b(x)$ .

Ratkaistaan sähkönkulutus  $x$  (kWh).

$$0,0662x + 4,02 = 0,0799x + 3,75 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 19,7 \text{ (kWh)}$$

Sähkönkulutuksen täytyisi olla 19,7 kWh, jotta kokonaishinnat olisivat samat.

- b) Sähkön kokonaishintaan kuuluu vuodessa yksikköhinta  $x$  kilowattitunnista, sekä 12 kertaa kuukausittainen perusmaksu 4,02 €. Muodostetaan lausekkeet.

$$a_{VUOSI}(x) = 0,0662x + 12 \cdot 4,02 = 0,0662x + 48,24$$

$$b_{VUOSI}(x) = 0,0799x + 12 \cdot 3,75 = 0,0799x + 45$$

Lasketaan kokonaishinnat, kun vuoden sähkönkulutus  $x = 2000$  kWh

$$a_{VUOSI}(2000) = 0,0662 \cdot 2000 + 48,24 = 180,64 \text{ (€)}$$

$$b_{VUOSI}(2000) = 0,0799 \cdot 2000 + 45 = 204,80 \text{ (€)}$$

Lasketaan kokonaishintojen erotus.

$$204,80 \text{ €} - 180,64 \text{ €} = 24,16 \text{ €}$$

Kokonaishintojen välinen ero vuoden aikana on 24,16 €.

### Vastaus

a)  $a(x) = 0,0662x + 4,02$  ja  $b(x) = 0,0799x + 3,75$

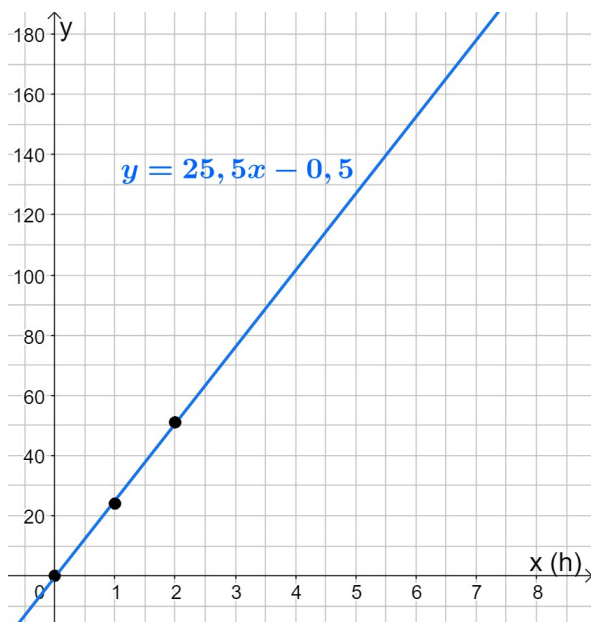
b) 19,7 kWh

c) 24,16 €

# K18

- a) Muuttuja  $x$  on kello kymmenestä kulunut aika tunteina ja muuttuja  $y$  myytyjen pullien lukumäärä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon suora taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Kulunut aika $x$ (h)	Myytyt pullat $y$
2	0	0
3	1	24
4	2	51



Myytyjen pullien lukumäärää kuvaava lineaarinen malli on  $y = 25,5x - 0,5$ , missä  $x$  on kello kymmenestä kulunut aika tunteina.

b) Lasketaan pullien määrä  $y$ , kun aikaa on kulunut  $x = 15 - 10 = 5$  (h).

$$\begin{aligned}y &= 25,5x - 0,5 \\&= 25,5 \cdot 5 - 0,5 \\&= 127\end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 5$ .

Pullia on myyty 127. Jäljellä on siis  $180 - 127 = 53$  pullaa.

c) Ratkaistaan kulunut aika  $x$ , kun pullia on myyty 180.

$$y = 25,5x - 0,5$$

Sijoitetaan  $y = 180$ .

$$180 = 25,5x - 0,5$$

Ratkaistaan muuttuja  $x$   
CAS-laskimella.

$$x = 7,078... \approx 7 \text{ (h)}$$

Aikaa on kulunut noin 7 tuntia. Kello on siis noin 17, kun pullat loppuvat.

### Vastaus

a)  $y = 25,5x - 0,5$ , missä  $y$  on myytyjen pullien määrä ja  $x$  on klo 10:stä kulunut aika tunteina.

b) 53 pullaa

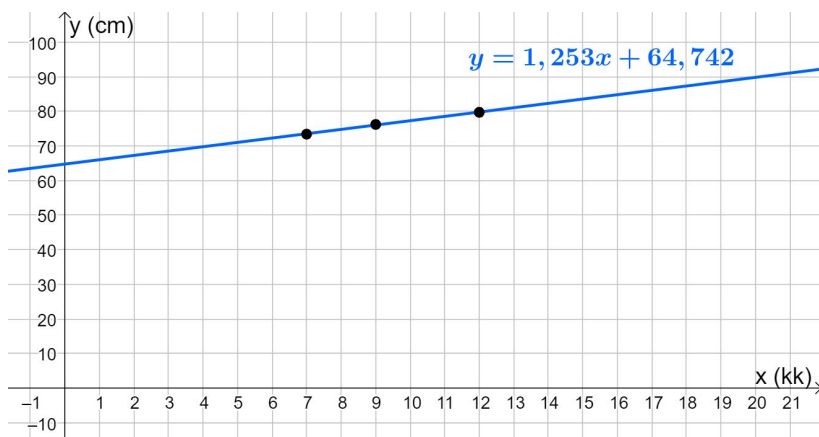
c) noin kello 17

# K19

- a) Muuttuja  $x$  Toukon ikä (kk) ja muuttuja  $y$  pituus (cm).

Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon suora taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Ikä $x$ (kk)	Pituus $y$ (cm)
2	7	73,4
3	9	76,2
4	12	79,7



Toukon pituutta kuvaava lineaarinen malli kolmen desimaalin tarkkuudella on  $y = 1,253x + 64,742$ , missä  $x$  on Toukon ikä kuukausina.

**b)** Lasketaan Toukon ikä  $x$ , hänen pituutensa  $y = 90$  cm.

$$y = 1,253x + 64,742$$

Sijoitetaan  $y = 90$ .

$$90 = 1,253x + 64,742$$

Ratkaistaan muuttuja  $x$

CAS-laskimella.

$$x = 20,158... \approx 20 \text{ (kk)}$$

Toukon ikä on noin 20 kk, eli 1 vuosi ja 8 kuukautta.

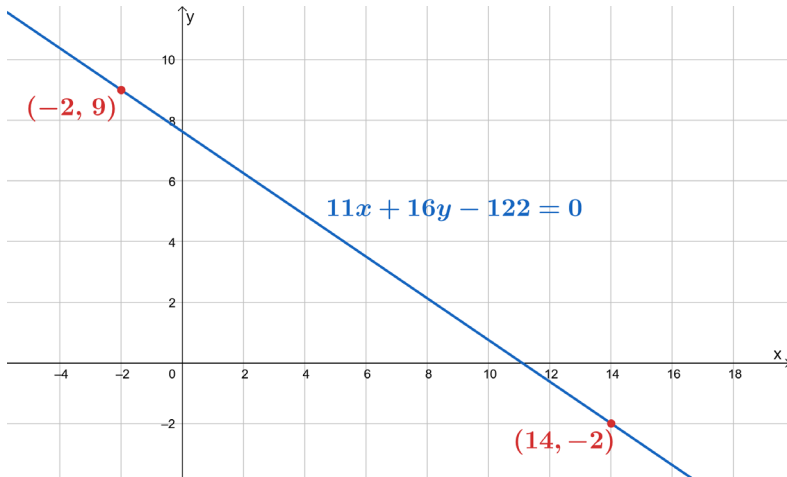
### **Vastaus**

**a)**  $y = 1,253x + 64,742$ , missä  $y$  on pituus (cm) ja  $x$  on ikä (kk).

**b)** 20 kk eli 1 v 8 kk

## K20

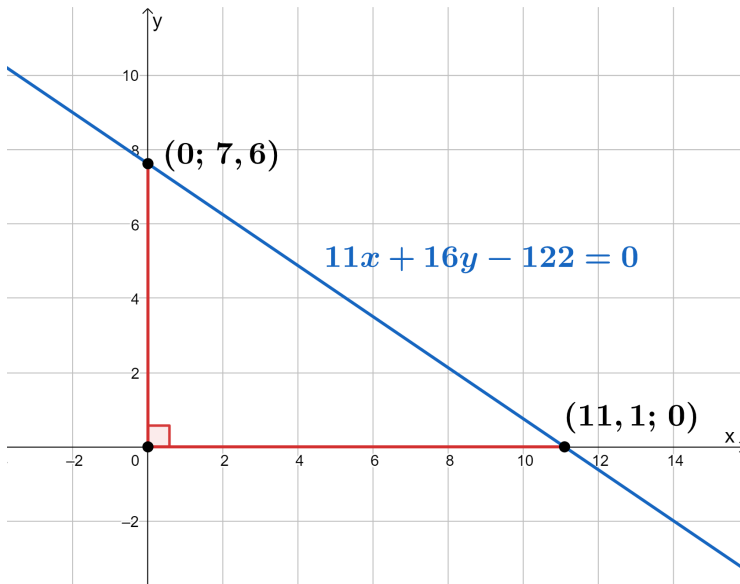
- a) Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon geometriaohjelmalla ja piirretään niiden kautta kulkeva suora.



Määritetään suoran yhtälön normaalimuoto valitsemalla oikea yhtälötyyppi. Suoran yhtälön normaalimuoto on muotoa  $ax + by + c = 0$ .

Suoran yhtälö normaalimuodossa on  $11x + 16y - 122 = 0$ .

- b) Määritetään suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet ja pyöristetään koordinaatit yhden desimaalin tarkkuuteen.



Kolmion  $y$ -akselin suuntaisen kateetin pituus on sama kuin suoran ja  $y$ -akselin leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti, eli 7,6.

Vastaavasti kolmion  $x$ -akselin suuntaisen kateetin pituus on 11,1.

- c) Kateettien pituuksien tarkat arvot saadaan selvittämällä leikkauspisteiden koordinaatit suoran yhtälön avulla.

$y$ -akselin leikkauspiste:

$$11x + 16y - 122 = 0$$

$$11 \cdot 0 + 16y - 122 = 0 \quad | +122$$

$$16y = 122 \quad |:16$$

$$y = \frac{122}{16}^{(2)}$$

$$y = \frac{61}{8} \left( = 7\frac{5}{8} \right)$$

Sijoitetaan  $x = 0$ .

Ratkaistaan  $y$ .

$x$ -akselin leikkauspiste:

$$11x + 16y - 122 = 0$$

$$11x + 16 \cdot 0 - 122 = 0 \quad | +122$$

$$11x = 122 \quad |:11$$

$$x = \frac{122}{11} \left( = 11\frac{1}{11} \right)$$

Sijoitetaan  $y = 0$ .

Ratkaistaan  $x$ .

Kateettien pituudet ovat siis  $\frac{61}{8}$  ja  $\frac{122}{11}$ .

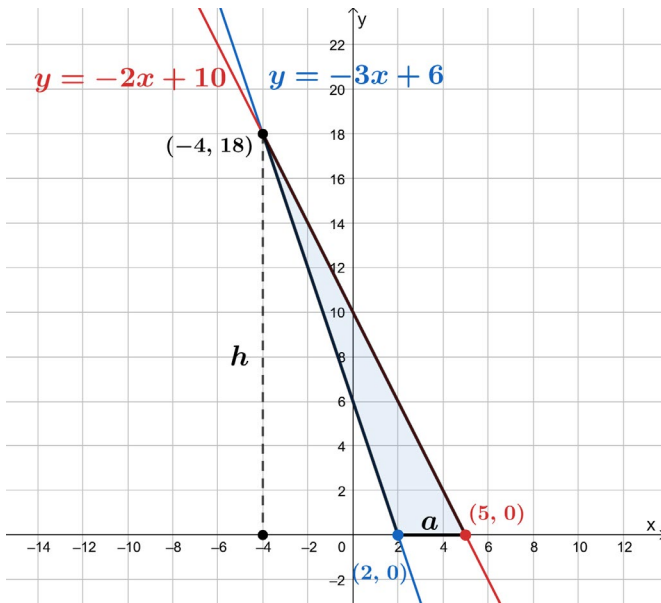
### Vastaus

a) Suoran yhtälö on  $11x + 16y - 122 = 0$ .

b) 7,6 ja 11,1

c)  $\frac{61}{8} = 7\frac{5}{8}$  ja  $\frac{122}{11} = 11\frac{1}{11}$

## K21



Lasketaan suoran  $y = -3x + 6$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$y = -3x + 6$$

Sijoitetaan  $y = 0$ .

$$0 = -3x + 6$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 2$$

Leikkauspiste on  $(2, 0)$ .

Lasketaan suoran  $y = -2x + 10$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$y = -2x + 10$$

Sijoitetaan  $y = 0$ .

$$0 = -2x + 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 5$$

Leikkauspiste on  $(5, 0)$ .

Lasketaan suorien leikkauspiste. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} y = -3x + 6 \\ y = -2x + 10. \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -4 \text{ ja } y = 18$$

Suorat leikkaavat pisteessä  $(-4, 18)$ .

Kolmion korkeus  $h$  on leikkauspisteen etäisyys  $x$ -akselista, eli 18.

Kolmion kannan leveys  $a$  on  $5 - 2 = 3$ .

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 18 = 27$$

$$A = \frac{1}{2}ah$$

**Vastaus**

27

## K22

Etsitään ensin suorien  $y = -3x - 2$  ja  $5x + 4y = 20$  leikkauspiste. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x + 4y = 20 \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $y = -3x - 2$ . Sijoitetaan lauseke  $-3x - 2$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$5x + 4y = 20$$

$$5x + 4(-3x - 2) = 20$$

$$5x - 12x - 8 = 20 \quad | +8$$

$$-7x = 28 \quad | :(-7)$$

$$x = -4$$

Sijoitetaan  $y = -3x - 2$ .

Avataan sulut.

Sijoitetaan  $x = -4$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = -3x - 2$$

$$y = -3 \cdot (-4) - 2$$

$$y = 12 - 2$$

$$y = 10$$

Sijoitetaan  $x = -4$ .

Suorat leikkaavat siis pisteessä  $(-4, 10)$ .

Ratkaistaan millä  $a$ :n arvolla suora  $ax + 4y - 44 = 0$  kulkee pisteen  $(-4, 10)$  kautta.

Piste  $(-4, 10)$  on suoralla  $ax + 4y - 44 = 0$  kun sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

$$ax + 4y - 44 = 0$$

Sijoitetaan  $x = -4$  ja  $y = 10$ .

$$a \cdot (-4) + 4 \cdot 10 - 44 = 0$$

$$-4a + 40 - 44 = 0$$

$$-4a - 4 = 0 \quad | +4$$

$$-4a = 4 \quad | :(-4)$$

$$a = -1$$

Kolmaskin suora siis kulkee pisteen  $(-4, 10)$  kautta kun  $a = -1$ .

### Vastaus

$a = -1$ , leikkauspiste  $(-4, 10)$

## K23

a)  $x \cdot x^5 = x^{1+5} = x^6$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

b)  $\frac{x^8}{x^7} = x^{8-7} = x$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

c)  $(-5x)^3 = (-5)^3 \cdot x^3 = -125x^3$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

d)  $2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{x^4}{2^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} x^4}{\cancel{16}_8} = \frac{x^4}{8}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

### Vastaus

a)  $x^6$

b)  $x$

c)  $-125x^3$

d)  $\frac{x^4}{8}$

## K24

a)  $3,8 \cdot 10^8$   
 $= 380\,000\,000$

Pilkku siirtyy 8 askelta oikealle.

b)  $7,12 \cdot 10^{-5}$   
 $= 0,000\,071\,2$

Pilkku siirtyy 5 askelta vasemmalle.

### Vastaus

a) 380 000 000

b) 0,000 071 2

## K25

Muunnetaan uraanin paino grammoiksi.

$$2,2 \text{ kg} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ g}$$

Lasketaan, kuinka monta uraaniatomia on  $2,2 \cdot 10^3$  grammassa uraania, kun yhden uraaniatomin massa on  $4,0 \cdot 10^{-22}$  grammaa.

$$\frac{2,2 \cdot 10^3}{4,0 \cdot 10^{-22}} = 5,5 \cdot 10^{24}$$

2,2 kilogrammassa uraania on  $5,5 \cdot 10^{24}$  uraaniatomia.

**Vastaus**

$$5,5 \cdot 10^{24}$$

## K26

a)  $-3x^5 = 3072 \quad | :(-3)$

$$x^5 = -1024$$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[5]{-1024} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälön ratkaisu on luvun  $-1024$  viides juuri.

Laskimella  $(-1024)^{\frac{1}{5}} = -4$ .

b)  $x^4 - 10 = 6 \quad | +10$

$$x^4 = 16$$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{16} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[4]{16} \\ &= 2 \quad \quad \quad = -2 \end{aligned}$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälön ratkaisu on luvun  $16$  neljäs juuri ja sen vastaluku.

Laskimella  $16^{\frac{1}{4}} = 2$ .

c)  $x^6 + 20 = 14 \quad | -20$

$$x^6 = -6$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, koska minkään luvun kuudes potenssi ei ole negatiivinen luku.

### Vastaus

a)  $x = -4$

b)  $x = 2$  tai  $x = -2$

c) ei ratkaisuja

## K27

a)  $x^{10} = 2000$

Yhtälön ratkaisu on luvun 2000 kymmenes juuri ja sen vastaluku.

$$x = \sqrt[10]{2000} \text{ tai } x = -\sqrt[10]{2000} \quad \text{Laskimella } 2000^{\frac{1}{10}} \approx 2,14.$$
$$\approx 2,14 \qquad \approx -2,14$$

b)  $4x^5 = 1 \quad |:4$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälön ratkaisu on luvun

$$x^5 = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}$  viides juuri.

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$
$$\approx 0,76$$

Laskimella  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 0,76$ .

c)  $x^7 \cdot 70 = -700 \quad |:70$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälön ratkaisu on luvun

$-10$  seitsemäs juuri.

$$x^7 = -10$$

$$x = \sqrt[7]{-10}$$
$$\approx -1,39$$

Laskimella  $(-10)^{\frac{1}{7}}$ .

### Vastaus

a)  $x \approx -2,14$  tai  $x \approx 2,14$

b)  $x \approx 0,76$

c)  $x \approx -1,39$

## K28

- a) Merkitään ja lasketaan luvun  $-49$  viides juuri.

$$\sqrt[5]{-49} \approx -2,178 \quad \text{Laskimella } (-49)^{\frac{1}{5}}.$$

- b) Merkitään ja lasketaan luvun  $135$  neljäs juuri.

$$\sqrt[4]{135} \approx 3,409 \quad \text{Laskimella } 135^{\frac{1}{4}}.$$

- c) Merkitään ja lasketaan luvun  $300$  seitsemäs juuri.

$$\sqrt[7]{300} \approx 2,259 \quad \text{Laskimella } 300^{\frac{1}{7}}.$$

### Vastaus

- a)  $\sqrt[5]{-49} \approx -2,178$   
b)  $\sqrt[4]{135} \approx 3,409$   
c)  $\sqrt[7]{300} \approx 2,259$

## K29

a) Piirretään funktion  $f(x) = x^6$  kuvaaja.

Yhtälön  $x^6 = 40$  ratkaisut ovat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla funktion  $f$  arvo on 40. Etsitään kuvaajalta ne pisteet, joiden  $y$ -koordinaatti on 40.

Piirretään suora  $y = 40$ .

Määritetään funktion  $f$  kuvaajan ja

Leikkauspisteiden  $x$ -koordinaatit kahden desimaalin tarkkuudella ovat  $-1,85$  ja  $1,85$ .

Siis  $x^6 = 40$ , kun  $x \approx -1,85$  tai  $x \approx 1,85$ .

The figure shows a Cartesian coordinate system with a grid. A blue curve representing the function  $y = x^6$  is plotted, passing through the origin and extending upwards as  $|x|$  increases. A horizontal red line representing  $y = 40$  is drawn across the graph. The two intersection points of the curve and the line are marked with black dots and labeled with their coordinates:  $(-1,85; 40)$  on the left and  $(1,85; 40)$  on the right. The x-axis is labeled from -6 to 4, and the y-axis is labeled from 0 to 50 in increments of 5.

b) Luvun 40 kuudes juuri on yhtälön  $x^6 = 40$  positiivinen ratkaisu.

a-kohdan perusteella  $\sqrt[6]{40} \approx 1,85$ .

### Vastaus

a)  $x \approx -1,85$  tai  $x \approx 1,85$

b)  $\sqrt[6]{40} \approx 1,85$

## K30

Kun väkiluku kasvaa vuosittain, alkuperäinen arvo tulee aina kerrotuksi muutoskerroimella. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Väkiluku kasvaa siis joka vuosi keskimäärin  $q$ -kertaiseksi.

Väkiluku on aluksi 30 000 ja kahdeksan vuoden jälkeen  $q^8 \cdot 30\,000$ .

Kahdeksan vuoden jälkeen väkiluku saa olla enintään 40 000.  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^8 \cdot 30\,000 = 40\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q \approx -1,037 \text{ tai } q \approx 1,037$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,037$ .

Väkiluku saa siis tulla joka vuosi enintään 1,037-kertaiseksi, jolloin se on aina vuoden lopussa 103,7 % edellisen vuoden lopun arvosta.

Taajaman vuotuinen kasvuprosentti saa siis olla keskimäärin  
 $103,7\% - 100\% = 3,7\%$ .

### Vastaus

3,7 %

# K31

Merkitään pääoman määrää alussa kirjaimella  $a$  ja vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Pääoma kasvaa korkoa tullen joka vuosi  $q$ -kertaiseksi, joten kymmenen vuoden päästä pääomaa on  $q^{10} \cdot a$ .

Tavoitteena on, että pääoma kaksinkertaistuisi kymmenessä vuodessa. Määrän tulee siis olla 200 % lähtötasosta  $a$  eli  $2a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{10} \cdot a = 2a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx 1,072$$

Pääoma kasvaa korolla joka vuosi 1,072-kertaiseksi, joten määrä on aina 107,2 % edellisen vuoden määrästä.

Vuosittaisen koron tulee olla  $107,2 \% - 100 \% = 7,2 \%$ .

**Vastaus**

7,2 %

## K32

Merkitään radioaktiivisen aineen määrää alussa kirjaimella  $a$  ja vuorokausittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Aineen määrä tulee joka vuorokausi  $q$ -kertaiseksi. Viikon, eli seitsemän vuorokauden jälkeen aineen määrä on  $q^7 \cdot a$ .

Viikossa aineesta hajosi 77 %. Aineen määrä seitsemän vuorokauden jälkeen on siis 23 % alkuperäisestä, eli  $0,23a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^7 \cdot a = 0,23a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx 0,81$$

Radioaktiivisen aineen määrä siis tuli joka vuorokausi 0,81-kertaiseksi, joten määrä oli aina 81 % edellisen vuorokauden lopun määrästä.

Aineesta hajoaa vuorokaudessa  $100 \% - 81 \% = 19 \%$ .

**Vastaus**

19 %

## K33

- a) Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella  $a$ . Hinta on viiden vuoden jälkeen

$$0,957 \cdot 0,928 \cdot 0,880 \cdot 0,869 \cdot 0,948 \cdot a \approx 0,64a.$$

Hinta tuli viidessä vuodessa  $0,64$  -kertaiseksi, eli se oli  $64\%$  alkuperäisestä.

Hinta aleni siis  $100\% - 64\% = 36\%$ .

- b) Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Hinta tuli joka vuosi  $q$  -kertaiseksi, joten viiden vuoden jälkeen hinta oli  $q^5 \cdot a$ .

Toisaalta hintaindeksi oli a-kohdan perusteella viiden vuoden jälkeen  $0,6438... \cdot a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^5 \cdot a = 0,6438... \cdot a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q \approx 0,916$$

Hinta tuli joka vuosi  $0,916$  -kertaiseksi, joten se on vuoden lopussa  $91,6\%$  edellisen vuoden lopun hinnasta.

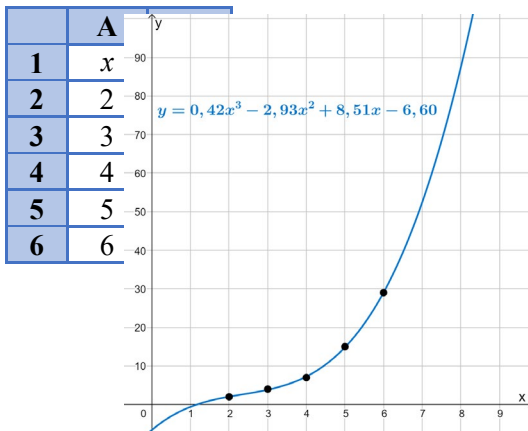
Hinta alein vuosittain keskimäärin  $100\% - 91,6\% = 8,4\%$ .

### Vastaus

- a)  $36\%$   
b)  $8,4\%$

# K34

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon kolmannen asteen polynomi taulukkolaskentaohjelmalla.

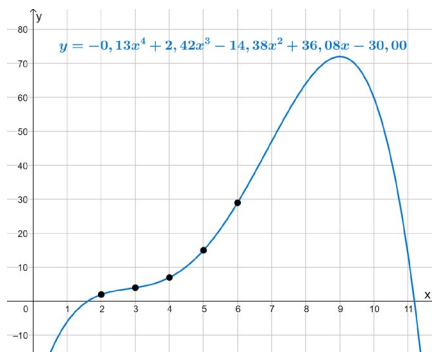


Mittaustuloksia kuvaava kolmannen asteen polynomi kahden desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on

$$y = 0,42x^3 - 2,93x^2 + 8,51x - 6,60.$$

- b) Sovitetaan samaan pistejoukkoon neljännen asteen polynomi taulukkolaskentaohjelmalla.

Mittaustuloksia kuvaava neljännen asteen polynomi kolmen desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on



$$y = -0,13x^4 + 2,42x^3 - 14,38x^2 + 36,08x - 30,00.$$

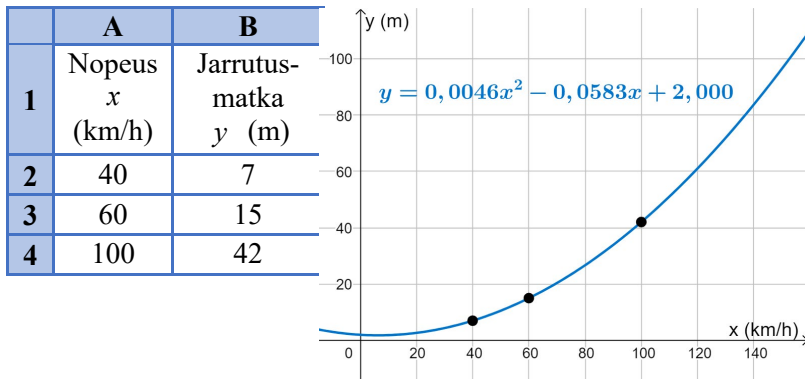
## Vastaus

a)  $y = 0,42x^3 - 2,93x^2 + 8,51x - 6,60$

b)  $y = -0,13x^4 + 2,42x^3 - 14,38x^2 + 36,08x - 30,00$

## K35

- a) Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.



Jarrutusmatkaa kuvaava toisen asteen yhtälö neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on  $y = 0,0046x^2 - 0,0583x + 2,0000$ , missä  $y$  on auton nopeus (km/h) ja  $x$  jarrutusmatka metreinä.

- b) Lasketaan jarrutusmatka  $y$ , kun nopeus  $x = 80$  km/h.

$$\begin{aligned} y &= 0,0046x^2 - 0,0583x + 2,0000 && \text{Sijoitetaan } x = 80. \\ &= 0,0046 \cdot 80^2 - 0,0583 \cdot 80 + 2,0000 \\ &\approx 27 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Jarrutusmatka on 27 metriä.

c) Ratkaistaan nopeus  $x$ , kun jarrutusmatka  $y = 30$  m.

$$y = 0,0046x^2 - 0,0583x + 2,0000 \quad \text{Sijoitetaan } y = 30.$$

$$30 = 0,0046x^2 - 0,0583x + 2,0000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx -72 \text{ tai } x \approx 85$$

Auton nopeus on positiivinen luku eli  $x \approx 85$  km/h. Jarrutusmatka on 30 m ajettaessa nopeudella 85 km/h.

### Vastaus

a)  $y = 0,0046x^2 - 0,0583x + 2,0000$

b) 27 m

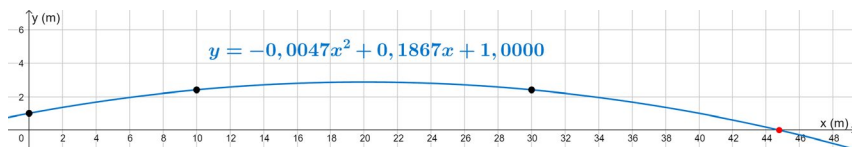
c) 85 km/h

## K36

- a) Sijoitetaan pallon lentorata koordinaatistoon niin, että potku lähtee pisteestä  $(0, 1)$ . Tällöin lentorataa kuvaava paraabeli kulkee myös pisteiden  $(10; 2,4)$  ja  $(30; 2,4)$  kautta.

Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja. Taulukoidaan pisteet ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	$x$	$y$
2	0	1
3	10	2,4
4	30	2,4



Pallon lentorataa kuvaavan paraabelin yhtälö neljän desimaalin tarkkuuteen sovitettuna on  $y = -0,0047x^2 + 0,1867x + 1,0000$ , missä  $y$  on korkeus ja  $x$  etäisyys lähtöpisteestä metreinä.

- b) Pallo osuu maahan paraabelin ja  $x$ -akselin oikeanpuoleisessa leikkauspisteessä. Leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti on 0. Lasketaan leikkauspisteen positiivinen  $x$ -koordinaatti.

$$y = -0,0047x^2 + 0,1867x + 1,0000 \quad \text{Sijoitetaan } y = 0.$$

$$0 = -0,0047x^2 + 0,1867x + 1,0000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 45 \text{ (m)}$$

Pallo osuisi maahan 45 metrin päässä lähtöpisteestä. Potku olisi siis kantanut 45 metriä.

**Vastaus**

- a)  $y = -0,0047x^2 + 0,1867x + 1,0000$ , kun pallon lähtöpiste on  $(0, 1)$   
b) 45 m

## K37

a)  $7^{2x} = 7^4$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\begin{array}{l} 2x = 4 \\ x = 2 \end{array} \quad | : 2$$

b)  $7^{x+3} = 49^x$

$$49 = 7^2$$

$$7^{x+3} = (7^2)^x$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$7^{x+3} = 7^{2x}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\begin{array}{l} x + 3 = 2x \\ -x = -3 \\ x = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | -2x - 3 \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

c) Yhtälöllä  $7^x = -235$  ei ole ratkaisuja, koska potenssin  $7^x$  arvo on aina positiivinen luku.

### Vastaus

a)  $x = 2$

b)  $x = 3$

c) ei ratkaisuja

## K38

a)  $3^{4x+14} = 27^x$

$$3^{4x+14} = (3^3)^x$$

$$3^{4x+14} = 3^{3x}$$

$$4x + 14 = 3x \quad | -3x - 14$$

$$x = -14$$

$$27 = 3^3$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

b)  $27^{2x} = 9^{x+8}$

$$(3^3)^{2x} = (3^2)^{x+8}$$

$$3^{6x} = 3^{2x+16}$$

$$6x = 2x + 16 \quad | -2x$$

$$4x = 16 \quad | :4$$

$$x = 4$$

$$27 = 3^3, 9 = 3^2$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

c)  $5^{x^2} = 125^x$

$$5^{x^2} = (5^3)^x$$

$$5^{x^2} = 5^{3x}$$

$$x^2 = 3x \quad | -3x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$125 = 5^3$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$a = 1, \quad b = -3 \quad \text{ja} \quad c = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{3+3}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Vastaus

**a)**  $x = -14$

**b)**  $x = 4$

**c)**  $x = 0$  tai  $x = 3$

## K39

a)  $f(4) = 15 \cdot 2^4 = 240$

Sijoitetaan  $x = 4$  funktion  
lausekkeeseen  $f(x) = 15 \cdot 2^x$ .

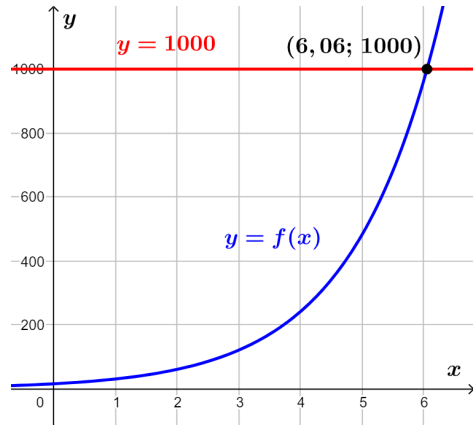
Tulos tarkoittaa, että musiikkivideon katsoneiden lukumäärä 4 tunnin kuluttua on 240.

b) Koska  $x$  on aika tunteina, funktion  $f(x) = 15 \cdot 2^x$  lausekkeen muutoskerroin 2 tarkoittaa, että katsoneiden lukumäärä tulee joka tunti kaksinkertaiseksi.

c) Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Piirretään suora  $y = 1000$  ja määritetään suoran ja kuvaajan leikkauspiste.

Videon katsoneiden lukumäärä on 1000, kun aikaa on kulunut noin 6,1 tuntia.



d) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 10 000 (henkilöä).

$$f(x) = 10\,000$$

$$15 \cdot 2^x = 10\,000$$

$$x = 9,380\dots$$

$$x \approx 9,4 \text{ (tuntia)}$$

Sijoitetaan  $f(x) = 15 \cdot 2^x$ .  
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Videon on katsonut 10 000 henkilöä noin 9,4 tunnin kuluttua.

**Vastaus**

**a)**  $f(4) = 240$

Videon on katsonut 4 tunnin kuluttua 240 henkilöä.

**b)** kaksinkertaiseksi

**c)** 6,1 tunnin kuluttua

**d)**  $15 \cdot 2^x = 10\,000$ ; 9,4 tunnin kuluttua

# K40

Peuroja alussa on 120, joten peurojen lukumäärän ilmaisee funktio

$$f(x) = 120 \cdot e^{0,103x}.$$

a) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 10$  (v).

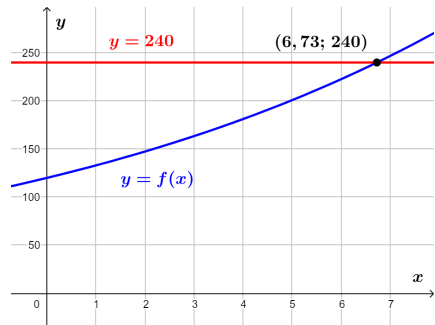
$$f(10) = 120 \cdot e^{0,103 \cdot 10} = 336,127... \approx 340 \text{ (kpl)}$$

10 vuoden kuluttua peuroja on noin 340.

b) Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.

Peurapopulaation kaksinkertainen määrä on  $2 \cdot 120 = 240$ .

Piirretään suora  $y = 240$  ja määritetään suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.



Peurapopulaation koko on kaksinkertaistunut, kun aikaa on kulunut noin 6,7 vuotta.

## Vastaus

a) 340 peuraa

b) 6,7 vuotta

# K41

Bakteerikasvuston massa tulee joka vuorokausi 2,9-kertaiseksi ja sen massa alussa on 130 g.

Bakteerikasvuston massan grammoina  $x$  vuorokauden jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = 130 \cdot 2,9^x$ .

a) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 3$ .

$$f(3) = 130 \cdot 2,9^3 = 3170,57 \approx 3200 \text{ (g)}$$

Kolmen vuorokauden kuluttua bakteerikasvuston massa on noin 3200 g.

b) Vuorokaudessa on 24 tuntia, joten 6 tuntia on  $\frac{6}{24} = 0,25$  vuorokautta.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 0,25$ .

$$f(0,25) = 130 \cdot 2,9^{0,25} = 169,645... \approx 170 \text{ (g)}$$

Kuuden tunnin kuluttua bakteerikasvuston massa on noin 170 g.

c) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = -1,5$ .

$$f(-1,5) = 130 \cdot 2,9^{-1,5} = 26,323... \approx 26 \text{ (g)}$$

Bakteerikasvuston massa 1,5 vuorokautta sitten oli noin 26 g.

## Vastaus

- a) 3200 g
- b) 170 g
- c) 26 g

## K42

- a) Liittymien määrä kasvaa joka vuosi 30 %, joten vuoden kuluttua määrä on  $100 \% + 30 \% = 130 \%$  tämän hetkisestä määrästä. Liittymien määrä tulee siis joka vuosi 1,3-kertaiseksi.

Liittymien määrä alussa on 23 000.

Liittymien määrän  $x$  vuoden kuluttua vuodesta 1980 jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = 23\,000 \cdot 1,3^x$ .

- b) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 3 000 000 (kpl).

$$f(x) = 3\,000\,000$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 23\,000 \cdot 1,3^x.$$

$$23\,000 \cdot 1,3^x = 3\,000\,000$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 18,565\dots$$

$$x \approx 19 \text{ (vuotta)}$$

Liittymien määrä kasvaa ajan kuluessa, joten niiden määrä oli yli 3 000 000, kun vuodesta 1980 oli kulunut vähintään 19 vuotta, eli vuonna  $1980 + 19 = 1999$ .

### Vastaus

- a)  $f(x) = 23\,000 \cdot 1,3^x$   
b) 1999

## K43

- a) Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Vuonna 1990 saimaannorppien määrä oli 190 ja sen määrä tulee joka vuosi  $q$ -kertaiseksi. 25 vuoden kuluttua eli vuonna 2015 saimaannorppien määrä on  $190 \cdot q^{25}$  (kpl).

Toisaalta vuonna 2015 saimaannorppien määrä oli 320.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$190 \cdot q^{25} = 320$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 1,021070\dots$$

$$q \approx 1,02107$$

Saimaannorppien määrä tulee joka vuosi keskimäärin 1,02107-kertaiseksi, joten määrä kasvaa vuosittain keskimäärin 2,107 %  $\approx$  2,1 %.

- b) Saimaannorppien määrän  $x$  vuoden kuluttua vuodesta 1990 ilmaisee funktio  $f(x) = 190 \cdot 1,02107^x$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 400 (kpl).

$$f(x) = 400$$

Sijoitetaan  $f(x) = 190 \cdot 1,02107^x$ .

$$190 \cdot 1,02107^x = 400$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 35,702\dots$$

$$x \approx 35,7 \text{ (vuotta)}$$

Saimaannorppien määrä kasvaa ajan kuluessa, joten ensimmäinen vuosi, jona saimaannorppia on yli 400 on  $1990 + 36 = 2026$ .

- c) Vuodesta 1990 vuoteen 2020 on 30 vuotta. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 30$ .

$$f(30) = 190 \cdot 1,02107^{30} = 355,15... \approx 360 \text{ (kpl)}$$

Saimaannorppien määrä vuonna 2020 oli noin 360.

**Vastaus**

- a) 2,1 %
- b) 2026
- c) 360

## K44

Radioaktiivisen aineen määrä vähenee joka vuosi  $0,043\%$ , joten vuoden kuluttua sen määrä on  $100\% - 0,043\% = 99,957\%$  tämän hetkisestä määrästä. Aineen määrä tulee siis joka vuosi  $0,99957$ -kertaiseksi.

Merkitään radioaktiivisen aineen määrää alussa kirjaimella  $a$ .

Aineen määrän  $x$  vuoden jälkeen ilmaisee funktio  $f(x) = a \cdot 0,99957^x$ .

Kun aineen määrä on puolittunut, se on  $0,5a$ . Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $0,5a$ .

$$f(x) = 0,5a$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = a \cdot 0,99957^x.$$

$$a \cdot 0,99957^x = 0,5a$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 1611,623\dots$$

$$x \approx 1610 \text{ (vuotta)}$$

Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on noin  $1610$  vuotta.

### Vastaus

$1610$  vuotta

## K45

Merkitään auringon lämpösäteilyn alkuperäistä määrää kirjaimella  $a$ .

Yhden senttimetrin paksuisen kerroksen läpi pääsee

$100 \% - 23 \% = 77 \%$  siihen tulevasta säteilystä, joten läpi päässeän säteilyn määrä tulee

$0,77$ -kertaiseksi. Kun säteily on läpäissyt  $x$  senttimetriä paksun lasin, valon määrä on tullut  $0,77^x$ -kertaiseksi.

Säteilyn määrän  $x$  senttimetriä paksun lasin jälkeen ilmaisee funktio

$$f(x) = a \cdot 0,77^x.$$

a) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 0,7$  (cm).

$$f(0,7) = a \cdot 0,77^{0,7} = 0,832...a \approx 0,83a$$

Alkuperäisestä säteilyn määrästä  $a$  on jäljellä  $83 \%$ , joten lasi pidättää lämpösäteilystä  $100 \% - 83 \% = 17 \%$ .

b) Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 2,5$  (cm).

$$f(2,5) = a \cdot 0,77^{2,5} = 0,520...a \approx 0,52a$$

Alkuperäisestä säteilyn määrästä  $a$  on jäljellä  $52 \%$ , joten lasi pidättää lämpösäteilystä  $100 \% - 52 \% = 48 \%$ .

### Vastaus

a)  $17 \%$

b)  $48 \%$

## K46

Merkitään kaasun alkuperäistä määrää kirjaimella  $a$ .

Yksi männänisku poistaa 3,0 % kammiossa olevasta kaasusta, joten kaasun määrä tulee 0,97-kertaiseksi. Kaasun määrä  $x$  männäniskun jälkeen on tullut  $0,97^x$ -kertaiseksi.

Kaasun määrän  $x$  männäniskun jälkeen ilmaisee funktio

$$f(x) = a \cdot 0,97^x.$$

Kun kaasusta on poistunut 99 %, sitä on jäljellä 1 % ja sen määrä on  $0,01a$ . Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $0,01a$ .

$$f(x) = 0,01a$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = a \cdot 0,97^x.$$

$$a \cdot 0,97^x = 0,01a$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 151,191\dots$$

$$x \approx 151,2 \text{ (kpl)}$$

Männäniskujen määrä on kokonaisluku, joten kaasusta on poistunut 99 %, kun mäntä on iskenyt 152 kertaa.

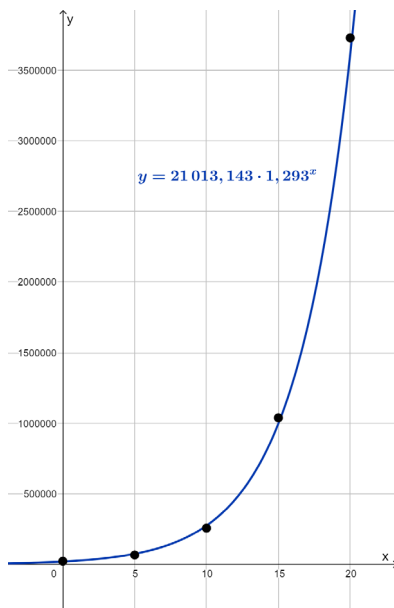
**Vastaus**

152

## K47

- a) Muuttuja  $x$  on vuodesta 1980 kulunut aika vuosina ja muuttuja  $y$  matkapuhelinliittymien lukumäärä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika $x$ (v)	Liittymien määrä $y$ (kpl)
2	0	23 482
3	5	67 639
4	10	257 872
5	15	1 039 126
6	20	3 728 625



Liittymien määrää (kpl) kuvaava eksponentiaalinen malli kolmen desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 21\,013,143 \cdot 1,293^x,$$

missä  $x$  on vuodesta 1980 kulunut aika vuosina.

b) Vuodesta 1980 vuoteen 1991 on  $1991 - 1980 = 11$  vuotta.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 11$  (vuotta).

$$f(11) = 21\,013,143 \cdot 1,293^{11} = 354\,874,496... \approx 355\,000 \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan vuonna 1991 puhelinliittymien määrä on 355 000.

c) Lasketaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 500 000 (kpl).

$$f(x) = 500\,000 \qquad f(x) = 21\,013,143 \cdot 1,293^x.$$

$$21\,013,143 \cdot 1,293^x = 500\,000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 12,334...$$

$$x \approx 12,3 \text{ (vuotta)}$$

Mallin mukaan puhelinliittymien määrä ylitti 500 000 vuoden  $1980 + 12 = 1992$  aikana.

### Vastaus

a)  $f(x) = 21\,013,143 \cdot 1,293^x$

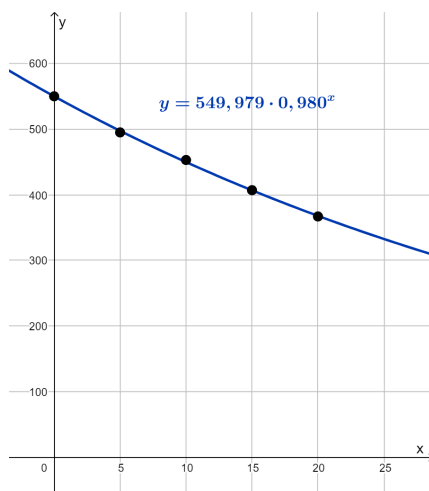
b) 355 000

c) vuoden 1992 aikana

# K48

- a) Muuttuja  $x$  on vuodesta 2000 kulunut aika vuosina ja muuttuja  $y$  kylän asukasluku. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika $x$ (v)	Asukasluku $y$ (kpl)
2	0	550
3	5	495
4	10	453
5	15	407
6	20	367



Kylän asukaslukua kuvaava eksponentiaalinen malli kolmen desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 549,979 \cdot 0,980^x,$$

missä  $x$  on vuodesta 2000 kulunut aika vuosina.

**b)** Vuodesta 2000 vuoteen 2030 on  $2030 - 2000 = 30$  vuotta.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 30$  (vuotta).

$$f(30) = 549,979 \cdot 0,980^{30} = 300,004... \approx 300 \text{ (asukasta)}$$

Mallin mukaan vuonna 2030 kylässä asuu 300 asukasta.

### **Vastaus**

**a)**  $f(x) = 549,979 \cdot 0,980^x$

**b)** 300 asukasta

## K49

Kootaan tiedot taulukkoon.

vuosi	vlogin päivittäinen katsojamäärä
2018	450
2022	5300

- a) Rakennusvlogin katsojien määrä kasvaa joka vuosi yhtä monella katsojalla, joten muutos on lineaarista.

4 vuoden aikana päivittäisten katsojien määrä on kasvanut  $5300 - 450 = 4850$  katsojalla. Yhdessä vuodessa kasvu on ollut keskimäärin  $\frac{4850}{4} = 1212,5$  katsojaa.

Kun vuoden 2018 alusta on kulunut  $x$  vuotta, vlogin katsojien määrän ilmaisee funktio

$$f(x) = 1212,5x + 450.$$

Lukijamäärään 450

lisätään  $x$  kertaa 1212,5.

Vuodesta 2018 vuoteen 2030 on kulunut aikaa 12 vuotta. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 12$  (vuotta).

$$f(12) = 1212,5 \cdot 12 + 450 = 15\,000$$

Tammikuussa 2030 vlogin päivittäisten katsojien määrä on 15 000.

- b) Rakennusvlogin katsojien määrä kasvaa joka vuosi yhtä monta prosenttia, joten muutos on eksponentiaalista.

Merkitään yhden vuoden muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kun vuodesta 2018 on kulunut 4 vuotta, katsojien määrä on  $450 \cdot q^4$ . Toisaalta katsojien määrä on 5300.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$450 \cdot q^4 = 5300 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q = -1,852532... \quad \text{tai} \quad q = 1,852532...$$

$$q \approx -1,85253 \quad q \approx 1,85253$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,85253$ .

Kun vuoden 2018 alusta on kulunut  $x$  vuotta, vlogin katsojien määrän ilmaisee funktio

$$g(x) = 450 \cdot 1,85253^x. \quad \begin{array}{l} \text{Lukijamäärä 450 kerrotaan} \\ x \text{ kertaa luvulla 1,85253.} \end{array}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 12$  (vuotta).

$$f(12) = 450 \cdot 1,85253^{12} = 735\,183,091... \approx 740\,000$$

Tammikuussa 2030 vlogin päivittäisten katsojien määrä on noin 740 000.

### Vastaus

a) 15 000

b) 740 000

## K50

Merkitään yhden tunnin muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Lämpötilaero on alussa  $27\text{ °C} - 4\text{ °C} = 23\text{ °C}$  ja se tulee joka tunti  $q$ -kertaiseksi. Neljän tunnin kuluttua lämpötilaero on  $23 \cdot q^4$  (°C).

Toisaalta neljän tunnin kuluttua lämpötilaero on  $27\text{ °C} - 21\text{ °C} = 6\text{ °C}$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$23 \cdot q^4 = 6$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = -0,714670... \quad \text{tai} \quad q = 0,714670...$$

$$q \approx -0,71467 \quad q \approx 0,71467$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,71467$ .

Juomapullon ja ulkoilman lämpötilaeron celsius-asteina  $x$  tunnin kuluttua ilmaisee funktio  $f(x) = 23 \cdot 0,71467^x$ .

Kun juomapullon lämpötila on  $12\text{ °C}$ , juomapullon ja ulkoilman välinen lämpötilaero on  $27\text{ °C} - 12\text{ °C} = 15\text{ °C}$ .

Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on  $15$  (°C).

$$f(x) = 15$$

$$\text{Sijoitetaan } f(x) = 23 \cdot 0,71467^x.$$

$$23 \cdot 0,71467^x = 15$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 1,27240...$$

$$x \approx 1,2724 \text{ (tuntia)}$$

Muutetaan 1,2724 tuntia tunneiksi ja minuuteiksi.

$$0,2724 \text{ h} = 0,2724 \cdot 60 \text{ min} = 16,34\dots \text{ min} \approx 16 \text{ min},$$

joten  $1,2724 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 16 \text{ min}$ .

Koska juomapullon lämpötila kasvaa ajan kuluessa, olisi juoma pitänyt nauttia viimeistään, kun ulosviennistä on kulunut 1 h 16 min.

### **Vastaus**

Kun ulosviennistä on kulunut 1 h 16 min (1,2724 h).

# K51

a) Luvun 49 seitsemänkantainen logaritmi merkitään  $\log_7 49$ .

$\log_7 49 = 2$ ,  $\log_7 49$  on se potenssi, johon kantaluku 7  
koska  $7^2 = 49$ . on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 49.

b) Luvun 128 kaksikantainen logaritmi merkitään  $\log_2 128$ .

$\log_2 128 = 7$ ,  $\log_2 128$  on se potenssi, johon kantaluku 2  
koska  $2^7 = 128$ . on korotettava, jotta tulokseksi saadaan 128.

c) Luvun 10 000 kymmenkantainen logaritmi merkitään  $\log_{10} 10\,000$ .

$\log_{10} 10\,000 = 4$ ,  $\log_{10} 10\,000$  on se potenssi, johon  
koska  $10^4 = 10\,000$ . kantaluku 10 on korotettava, jotta  
tulokseksi saadaan 10 000.

## Vastaus

a)  $\log_7 49 = 2$  (koska  $7^2 = 49$ )

b)  $\log_2 128 = 7$  (koska  $2^7 = 128$ )

c)  $\log_{10} 10\,000 = 4$  (koska  $10^4 = 10\,000$ )

## K52

a)  $5^x = 73$

EkspONENTTI  $x$  on luvun 73 viisi-  
kantainen logaritmi.

$$x = \log_5 73$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$= 2,665... \approx 2,67$$

b)  $3^{2x} = 21$

EkspONENTTI  $2x$  on luvun 21 kolme-  
kantainen logaritmi.

$$2x = \log_3 21 \quad | :2$$

Ratkaistaan  $x$ .

$$x = \frac{\log_3 21}{2}$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$= 1,385... \approx 1,39$$

c)  $2^{3-5x} = 189$

EkspONENTTI  $3-5x$  on luvun 189 kaksi-  
kantainen logaritmi.

$$3-5x = \log_2 189 \quad | -3$$

Ratkaistaan  $x$ .

$$-5x = \log_2 189 - 3 \quad | :(-5)$$

$$x = \frac{3 - \log_2 189}{5}$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$= -0,912... \approx -0,91$$

### Vastaus

a)  $x \approx 2,67$

b)  $x \approx 1,39$

c)  $x \approx -0,91$

## K53

a) Koska muuttujan  $x$  kolmekantainen logaritmi on 2, niin  $x = 3^2 = 9$ .

b) Koska muuttujan  $x$  kuusikantainen logaritmi on 2, niin  
 $x = 6^2 = 36$ .

c) Koska muuttujan  $x$  kaksikantainen logaritmi on  $-3$ , niin  
 $x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ .

### Vastaus

a)  $x = 9$

b)  $x = 36$

c)  $x = \frac{1}{8}$

## K54

a)  $\log_4 4^9 = 9$ , koska  $4^9 = 4^9$ .

b)  $\log_8 1 = 0$ , koska  $8^0 = 1$ .

c)  $\log_2 0,5 = -1$ , koska  $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

### Vastaus

a)  $\log_4 4^9 = 9$

b)  $\log_8 1 = 0$

c)  $\log_2 0,5 = -1$

## K55

- a) Venuksen fysikaalinen kirkkaus on  $F = 58$ . Lasketaan Venuksen magnitudi.

$$m = -2,5 \log_{10} 58 = -4,408... \approx -4,4$$

Siriuksen fysikaalinen kirkkaus on  $F = 4,0$ . Lasketaan Siriuksen magnitudi.

$$m = -2,5 \log_{10} 4,0 = -1,505... \approx -1,5$$

- b) Sijoitetaan kaavaan  $m = -2,5 \log_{10} F$  magnitudi  $m = 6,0$  ja ratkaistaan  $F$ .

$$m = -2,5 \log_{10} F$$

Sijoitetaan  $m = 6,0$ .

$$6,0 = -2,5 \log_{10} F$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$F = 0,00398...$$

$$F \approx 0,004$$

Koska fysikaalisen kirkkauden  $F$  yksikkönä on Vegan kirkkaus, himmeimpien paljaalla silmällä havaittavien taivaankappaleiden fysikaalinen kirkkaus on noin neljä tuhannesosaa Vegan kirkkaudesta.

### Vastaus

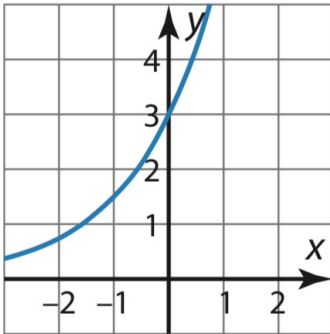
- a) Venus:  $m = -2,5 \log_{10} 58 \approx -4,4$

Sirius:  $m = -2,5 \log_{10} 4,0 \approx -1,5$

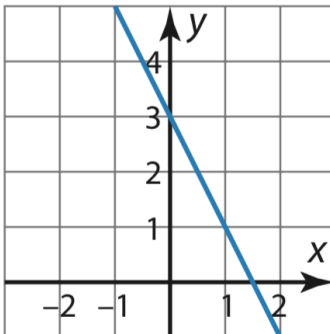
- b)  $F \approx 0,004$  eli kirkkaus on neljä tuhannesosaa Vegan kirkkaudesta.

# A1

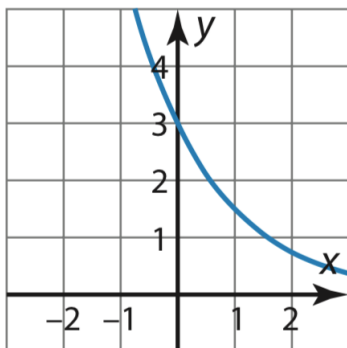
Funktio  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  on muotoa  $a \cdot q^x$ , joten se kuvaa eksponentiaalista muutosta. Koska muutoskerroin  $q = 2 > 1$ , niin funktio kuvaa eksponentiaalista kasvamista. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 4.



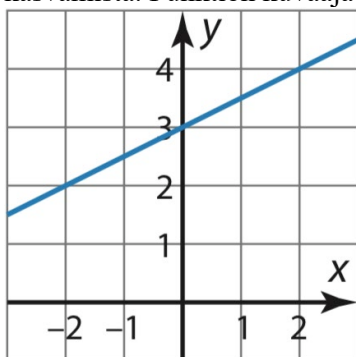
Funktio  $g(x) = 3 - 2x$  on muotoa  $s + kx$ , joten se kuvaa lineaarista muutosta. Koska kulmakerroin  $k = -2 < 0$ , niin funktio kuvaa lineaarista vähenemistä. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 1.



Funktio  $h(x) = 3 \cdot 0,5^x$  on muotoa  $a \cdot q^x$ , joten se kuvaa eksponentiaalista muutosta. Koska muutoskerroin  $q = 0,5 < 1$ , niin funktio kuvaa eksponentiaalista vähenemistä. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 2.



Funktio  $i(x) = 3 + 0,5x$  on muotoa  $s + kx$ , joten se kuvaa lineaarista muutosta. Koska kulmakerroin  $k = 0,5 > 0$ , niin funktio kuvaa lineaarista kasvamista. Funktion kuvaaja on siis vaihtoehto 3.



**Vastaus**

$f - 4, g - 1, h - 2, i - 3$

## A2

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (7x)^2 x^5 &= 7^2 \cdot x^2 x^5 \\ &= 49x^{2+5} \\ &= 49x^7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ab)^n &= a^n b^n \\ a^m a^n &= a^{m+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \frac{12x^5 x^2}{2x^3 \cdot 3x^4} &= \frac{8x^7}{2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot x^4} \\ &= \frac{12 \cancel{x^7}}{6 \cancel{x^7}} \\ &= \frac{12}{6} = 2\end{aligned}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad (5x)^2 - 5x^2 &= 5^2 \cdot x^2 - 5x^2 \\ &= 25x^2 - 5x^2 \\ &= 20x^2\end{aligned}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\begin{aligned}\text{d)} \quad 50 \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^2 &= 50 \cdot \frac{x^2}{5^2} \\ &= \frac{50x^2}{25} \\ &= \frac{\cancel{50}^2 x^2}{\cancel{25}_1} \\ &= 2x^2\end{aligned}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

## Vastaus

a)  $49x^7$

b) 2

c)  $20x^2$

d)  $2x^2$

## A3

a)  $x^8 = 6561$

Yhtälön ratkaisut ovat luvun 6561 kahdeksas juuri ja sen vastaluku.

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[8]{6561} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[8]{6561} \\ &= 3 \qquad \qquad \qquad = -3\end{aligned}$$

Laskimella  $6561^{\frac{1}{8}} = 3$ .

b)  $3x^5 = -3072 \quad |:3$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

$$x^5 = -1024$$

Yhtälön ratkaisu on luvun  $-1024$  viides juuri.

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[5]{-1024} \\ &= -4\end{aligned}$$

Laskimella  $(-1024)^{\frac{1}{5}} = -4$ .

c)  $4^{2x+1} = 4^{21}$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned}2x+1 &= 21 \quad | -1 \\ 2x &= 20 \quad |:2 \\ x &= 10\end{aligned}$$

d)  $4^{x+1} = 8^{x-2}$

$$4 = 2^2, \quad 8 = 2^3$$

$$(2^2)^{x+1} = (2^3)^{x-2}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$2^{2x+2} = 2^{3x-6}$$

Yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned}2x+2 &= 3x-6 \quad | -3x-2 \\ -x &= -8 \quad | \cdot (-1) \\ x &= 8\end{aligned}$$

### Vastaus

a)  $x = -3$  tai  $x = 3$

b)  $x = -4$

c)  $x = 10$

d)  $x = 8$

## A4

- a) Lasketaan pisteiden  $(1, -3)$  ja  $(4, -2)$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$\begin{aligned}k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\&= \frac{-2 - (-3)}{4 - 1} = \frac{-2 + 3}{-3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Sijoitetaan  $y_2 = -2$ ,  $y_1 = -3$ ,  
 $x_2 = 4$  ja  $x_1 = 1$ .

- b) Suora kulkee pisteen  $(1, -3)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $\frac{1}{3}$ .

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y_0 = -3, k = \frac{1}{3} \text{ ja } x_0 = 1$$

$$y - (-3) = \frac{1}{3}(x - 1)$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$ .

$$y + 3 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad | -3$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$$

Suoran yhtälö on  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ .

c) Ratkaistaan suoran  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$$

Sijoitetaan  $y = 0$  ja  
ratkaistaan  $x$ .

$$0 = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \quad | \cdot 3$$

$$0 = x - 10 \quad | +10$$

$$10 = x$$

$$x = 10$$

Leikkauspiste on  $(10, 0)$ .

Suoran yhtälön  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$  vakiotermi on  $-\frac{10}{3}$ , joten suora

leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, -\frac{10}{3})$ .

### Vastaus

a)  $k = \frac{1}{3}$

b)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

c)  $(0, -\frac{10}{3})$  ja  $(10, 0)$

## A5

Merkitään maalin A määrää litroina kirjaimella  $x$  ja maalin B määrää litroina kirjaimella  $y$ .

### Keltainen pigmentti:

Litraan maalia A menee  $80 \text{ g} = 0,08 \text{ kg}$  keltaista pigmenttiä. Maaliin A siis menee yhteensä  $0,08x$  (kg) keltaista pigmenttiä.

Litraan maalia B menee  $120 \text{ g} = 0,12 \text{ kg}$  keltaista pigmenttiä. Maaliin B siis menee yhteensä  $0,12y$  (kg) keltaista pigmenttiä.

Yhteensä keltaista pigmenttiä käytettiin  $3,2$  kg.

### Sininen pigmentti:

Litraan maalia A menee  $110 \text{ g} = 0,11 \text{ kg}$  sinistä pigmenttiä. Maaliin A siis menee yhteensä  $0,11x$  (kg) sinistä pigmenttiä.

Litraan maalia B menee  $90 \text{ g} = 0,09 \text{ kg}$  sinistä pigmenttiä. Maaliin B siis menee yhteensä  $0,09y$  (kg) sinistä pigmenttiä.

Yhteensä sinistä pigmenttiä käytettiin  $3,5$  kg.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} 0,08x + 0,12y = 3,2 \\ 0,11x + 0,09y = 3,5 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 22 \text{ ja } y = 12$$

Väripigmenteistä valmistettiin  $22$  litraa maalia A ja  $12$  litraa maalia B.

### Vastaus

maalia A  $22$  litraa, maalia B  $12$  litraa

## A6

- a) Merkitään vuorokauden maksimilämpötilaa  $x$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) ja myytyjen virvoitusjuomien lukumäärää  $y$ . Myynnin riippuvuus lämpötilasta on lineaarinen, eli sitä kuvaa suora.

Annetuista tiedoista saadaan kaksi koordinaatiston pistettä.

Lämpötila $x$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	Myydyt virvoitusjuomat $y$ (pulloa)	$(x, y)$
14	80	(14, 80)
17	95	(17, 95)

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{95 - 80}{17 - 14} = \frac{15}{3} = 5$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora kulkee pisteen (14, 80) kautta ja sen kulmakerroin on 5. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 80 = 5(x - 14)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$   
CAS-laskimella.

$$y = 5x + 10$$

Suoran yhtälö on  $y = 5x + 10$ .

- b) Sijoitetaan suoran yhtälöön lämpötila  $x = 25$  (°C) ja ratkaistaan myytyjen virvoitusjuomien määrä  $y$ .

$$y = 5x + 10$$

Sijoitetaan  $x = 25$ .

$$y = 5 \cdot 25 + 10$$

$$y = 135 \text{ (pulloa)}$$

Virvoitusjuomia menee kaupaksi 135 pulloa.

- c) Sijoitetaan suoran yhtälöön myytyjen virvoitusjuomien määrä  $y = 0$  (pulloa) ja ratkaistaan lämpötila  $x$ .

$$y = 5x + 10$$

Sijoitetaan  $y = 0$ .

$$0 = 5x + 10$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -2 \text{ (°C)}$$

Virvoitusjuomien myynti loppuu kokonaan, kun päivän korkein lämpötila on  $-2$  °C.

### Vastaus

- a)  $y = 5x + 10$   
b) 135 pulloa  
c)  $-2$  °C

## A7

- a) Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Gepardien määrä tuli siis joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Vuonna 1900 gepardeja arvioitiin olevan 100 000. Vuodesta 1900 vuoteen 2017 kulunut aika on  $2017 - 1900 = 117$  vuotta. Vuonna 2017 gepardien lukumäärä oli siis  $q^{117} \cdot 100\,000$ .

Toisaalta vuonna 2017 gepardeja oli 7100. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{117} \cdot 100\,000 = 7100$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q \approx 0,97765$$

$$\approx 0,978$$

Gepardien lukumäärä tuli joka vuosi 0,978-kertaiseksi, joten lukumäärä vuoden lopussa on aina 97,8 % edellisen vuoden lopun määrästä.

Gepardien lukumäärä väheni vuosittain keskimäärin  $100\% - 97,8\% = 2,2\%$ .

- b) Vuodesta 1900 vuoteen 1975 kulunut aika on  $1975 - 1900 = 75$  vuotta. Vuonna 1975 gepardien lukumäärä oli siis

$$q^{75} \cdot 100\,000 = 0,97765^{75} \cdot 100\,000 = 18355 \approx 18\,000.$$

### Vastaus

- a) 2,2 %  
b) 18 000

## A8

- a) Jos myynti vähenee lineaarisesti, sitä kuvaa suora. Tällöin kirjan myynti vähenee keskimäärin yhtä monella kappaletta vuosittain.

Kahdessa vuodessa kirjan myynti vähenee

$$2500 - 2200 = 300 \text{ kappaletta.}$$

Yhdessä vuodessa myynti vähenee siis

$$\frac{300}{2} = 150 \text{ kappaletta.}$$

Jos myynti vähenee lineaarisesti, kirjan myyntimäärä kuusi vuotta julkaisun jälkeen on

$$2500 - 6 \cdot 150 = 1600 \text{ kappaletta.}$$

- b) Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ .

Julkaisuvuonna kirjaa myytiin 2500 kappaletta. Kahden vuoden jälkeen myytyjen kirjojen määrä oli  $q^2 \cdot 2500$ .

Toisaalta kahden vuoden jälkeen kirjojen myynti oli 2200 kappaletta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^2 \cdot 2500 = 2200 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q \approx -0,93808 \text{ tai } q \approx 0,93808$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,93808$ .

Kirjan vuosittainen myynti tuli siis joka vuosi 0,93808-kertaiseksi. Lasketaan kirjan myyntimäärä kuuden vuoden jälkeen.

$$0,93808^6 \cdot 2500 = 1703,65 \approx 1700 \text{ (kappaletta)}$$

**Vastaus**

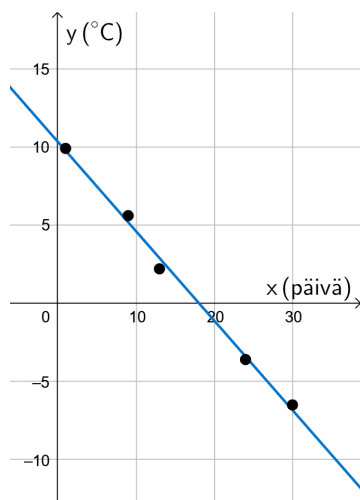
- a) 1600      b) 1700

## A9

- a) Muuttuja  $x$  on päivän järjestysluku lokakuun ensimmäisestä päivästä alkaen ja muuttuja  $y$  vuorokauden keskilämpötila ( $^{\circ}\text{C}$ ).

Syötetään havaintoarvot taulukkolaskentaohjelmaan ja sovitetaan pistejoukkoon suora.

	A	B
1	Päivä $x$	Keskilämpötila $y$ ( $^{\circ}\text{C}$ )
2	1	9,9
3	9	5,6
4	13	2,2
5	24	-3,6
6	30	-6,5



Vuorokauden keskilämpötilaa kuvaava lineaarinen malli kolmen desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$y = -0,572x + 10,328,$$

missä  $x$  on lokakuun päivä.

- b) Lasketaan keskilämpötila  $y$ , kun päivämäärä on 20.10. eli päivän järjestysluku  $x = 20$ .

$$\begin{aligned}y &= -0,572x + 10,328 && \text{Sijoitetaan } x = 20. \\&= -0,572 \cdot 20 + 10,328 \\&= -1,112 \\&\approx -1,1 \text{ (}^\circ\text{C)}\end{aligned}$$

Vuorokauden keskilämpötila oli  $-1,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- c) Ratkaistaan päivän järjestysluku  $x$ , kun keskilämpötila  $y = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

$$\begin{aligned}y &= -0,572x + 10,328 && \text{Sijoitetaan } y = 0. \\0 &= -0,572x + 10,328 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\x &= 18,055...\end{aligned}$$

Koska keskilämpötila laskee, ensimmäinen päivä, jonka keskilämpötila alitti  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  oli 19.10.

### Vastaus

- a)  $y = -0,572x + 10,328$ , missä  $y$  on keskilämpötila ( $^\circ\text{C}$ ) ja  $x$  lokakuun päivä.  
b)  $-1,1 \text{ }^\circ\text{C}$   
c) 19.10.

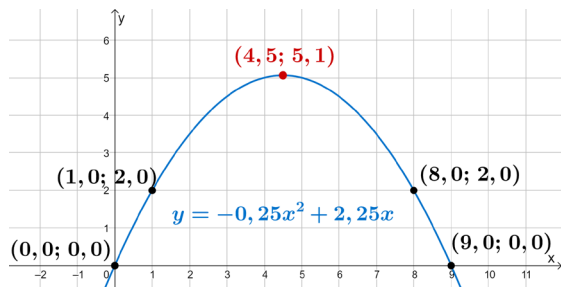
## A10

Sijoitetaan tunnelin poikkileikkaus koordinaatistoon niin, että sen vasen alakulma on pisteessä  $(0,0; 0,0)$ . Koska tunnelin leveys pohjalla on 9,0 m, poikkileikkauksen oikea alakulma on pisteessä  $(9,0; 0,0)$ .

Tunnelin leveys 2,0 metrin korkeudella on 7,0 metriä. Paraabeli kulkee siis myös pisteiden  $(1,0; 2,0)$  ja  $(8,0; 2,0)$  kautta.

Paraabeli on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja. Taulukoidaan pisteet ja sovitetaan pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	$x$	$y$
2	0,0	0,0
3	9,0	0,0
4	1,0	2,0
5	8,0	2,0



Tunnelin poikkileikkausta kuvaavan paraabelin yhtälö on  $y = -0,25x^2 + 2,25x$ , missä  $y$  on tunnelin korkeus ja  $x$  etäisyys tunnelin vasemmasta alakulmasta metreinä.

Tunnelin suurin korkeus on paraabelin huipussa. Paraabelin huippu sijaitsee  $x$ -akselin leikkauskohtien puolivälissä.

Lasketaan huipun  $x$ -koordinaatti.

$$x = \frac{0 + 9,0}{2} = 4,5$$

Lasketaan huipun  $y$ -koordinaatti.

$$\begin{aligned}y &= -0,25x^2 + 2,25x \\&= -0,25 \cdot 4,5^2 + 2,25 \cdot 4,5 \\&= 5,0625 \approx 5,1 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 4,5$ .

Paraabelin huippu on siis pisteessä  $(4,5; 5,1)$  ja näin ollen tunnelin suurin korkeus on  $5,1$  metriä.

**Vastaus**

$5,1 \text{ m}$

## B1

a)  $x^5 = 120$

$$x = \sqrt[5]{120} \\ \approx 2,61$$

Yhtälön ratkaisu on luvun 120 viides juuri.

Laskimella  $120^{\frac{1}{5}} \approx 2,61$ .

b)  $x^8 = 7054$

$$x = \sqrt[8]{7054} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[8]{7054} \\ \approx 3,03 \quad \quad \approx -3,03$$

Yhtälön ratkaisut ovat luvun 7054 kahdeksas juuri ja sen vastaluku.

Laskimella  $7054^{\frac{1}{8}} \approx 3,03$ .

c)  $4x^7 - 80 = 125 \quad | +80$

$$4x^7 = 205 \quad |:4$$

$$x^7 = \frac{205}{4}$$

$$x = \sqrt[7]{\frac{205}{4}} \\ \approx 1,75$$

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

Yhtälön ratkaisut on luvun  $\frac{205}{4}$  seitsemäs juuri.

Laskimella  $\left(\frac{205}{4}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 1,75$ .

d)  $x^6 + 95 = 15 \quad | -95$

$$x^6 = -80$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, koska minkään luvun kuudes potenssi ei ole negatiivinen luku.

Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle pelkkä potenssilauseke.

### Vastaus

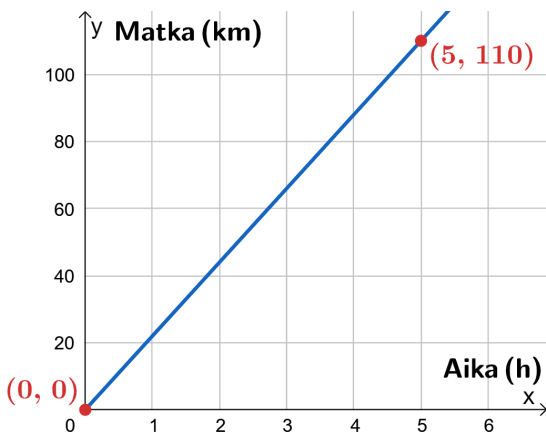
a)  $x \approx 2,61$

b)  $x \approx -3,03$  tai  $x \approx 3,03$

c)  $x \approx 1,75$

d) ei ratkaisuja

## B2



- a) Suora kulkee pisteiden  $(0, 0)$  ja  $(5, 110)$  kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{110 - 0}{5 - 0} = \frac{110}{5} = 22$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suoran kulmakerroin  $k = 22$ .

- b) Kulmakertoimen mukaan 1 tunnissa Antti pyörii 22 km.  
Kulmakerroin ilmaisee siis Antin pyöräilynopeuden 22 km/h.
- c) Suora kulkee pisteen  $(0, 0)$  kautta ja sen kulmakerroin on 22.  
Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 0 = 22(x - 0)$$

$$y = 22x$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Suoran yhtälö on  $y = 22x$ .

**d)** Ratkaistaan kulunut aika  $x$ , kun Antti on pyöräillyt  $y = 75$  km.

$$y = 22x$$

Sijoitetaan  $y = 75$ .

$$75 = 22x \quad |:22$$

$$x = \frac{75}{22} = 3,4090... \approx 3,409 \text{ (h)}$$

Antti oli pyöräillyt 3 tuntia ja  $0,409 \cdot 60 = 24,54 \approx 25$  minuuttia.

### **Vastaus**

**a)**  $k = 22$

**b)** Antin pyöräilynopeuden 22 km/h.

**c)**  $y = 22x$

**d)** 3 h 25 min

## B3

- b) Ratkaistaan suorien  $y = x - 5$  ja  $y = -2x + 1$  leikkauspiste.

Ratkaistaan siis yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x - 5 \\ y = -2x + 1. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $y = x - 5$ . Sijoitetaan lauseke  $x - 5$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{array}{rcl} x - 5 = -2x + 1 & | & +2x + 5 \\ 3x = 6 & & | : 3 \\ x = 2 & & \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 2$  esimerkiksi ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= x - 5 \\ &= 2 - 5 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 2$ .

Leikkauspiste on  $(2, -3)$ .

Koska tehtävän suora on yhdensuuntainen suoran  $y = 3x - 2$  kanssa, niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Suoran kulmakerroin on siis 3.

Suora kulkee pisteen  $(2, -3)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $3$ .  
Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k(x - x_0) && y_0 = -3, k = 3 \text{ ja } x_0 = 2 \\y - (-3) &= 3(x - 2) && \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\y + 3 &= 3(x - 2) \\y + 3 &= 3x - 6 && | -3 \\y &= 3x - 9\end{aligned}$$

Suoran yhtälö on  $y = 3x - 9$ .

- b)** Piste on suoralla täsmälleen silloin, kun sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Tutkitaan, toteuttaako piste  $(20, 50)$  suoran yhtälön.

$$\begin{aligned}y &= 3x - 9 && \text{Sijoitetaan } x = 20 \text{ ja } y = 50. \\50 &= 3 \cdot 20 - 9 \\50 &= 60 - 9 \\50 &= 51 \\&\text{epätosi}\end{aligned}$$

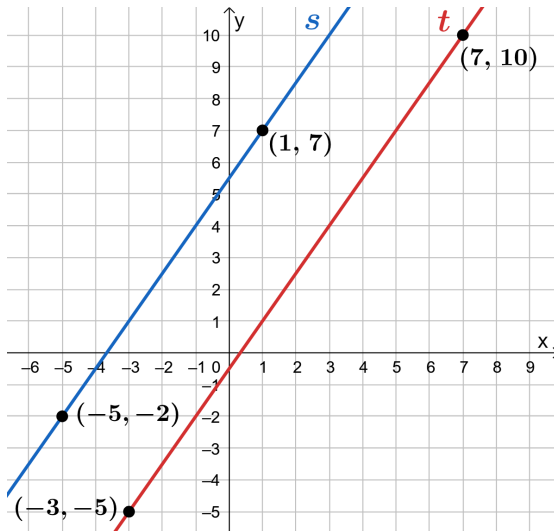
Piste  $(20, 50)$  ei toteuta suoran yhtälöä, joten piste ei ole suoralla.

### Vastaus

- a)**  $y = 3x - 9$   
**b)** ei ole

## B4

- a) Merkitään annetut pisteet koordinaatistoon syöttämällä geometriaohjelmaan niiden koordinaatit. Piirretään pisteiden kautta kulkevat suorat  $s$  ja  $t$ .



Kuvan perusteella suorat vaikuttavat olevan yhdensuuntaiset. Vain laskemalla voidaan varmistua suorien yhdensuuntaisuudesta.

**b)** Lasketaan suorien kulmakertoimet ja verrataan niitä toisiinsa.

Suoran  $s$  kulmakerroin:

$$\begin{aligned}k_s &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\&= \frac{7 - (-2)}{1 - (-5)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} (= 1,5)\end{aligned}$$

Suora  $s$  kulkee pisteiden  
 $(-5, -2)$  ja  $(1, 7)$  kautta.

Suoran  $t$  kulmakerroin:

$$\begin{aligned}k_t &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\&= \frac{10 - (-5)}{7 - (-3)} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} (= 1,5)\end{aligned}$$

Suora  $t$  kulkee pisteiden  
 $(-3, -5)$  ja  $(7, 10)$  kautta.

Kulmakertoimet ovat yhtä suuret, joten suorat  $s$  ja  $t$  ovat yhdensuuntaiset.

### Vastaus

**a)** Suorat vaikuttavat olevan yhdensuuntaiset.

**b)** Suorat ovat yhdensuuntaiset. (Kummankin suoran kulmakerroin on  $\frac{3}{2}$ .)

## B5

- a) Merkitään todellista nopeutta kirjaimella  $x$  ja mittarilukemaa kirjaimella  $y$ . Suureen  $y$  riippuvuutta suureesta  $x$  kuvaa suora.

Annetuista tiedoista saadaan kaksi koordinaatiston pistettä.

Todellinen nopeus $x$ (km/h)	Mittarilukema $y$ (km/h)	$(x, y)$
50	50	(50, 50)
100	90	(100, 90)

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{90 - 50}{100 - 50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora kulkee pisteen (50, 50) kautta ja sen kulmakerroin on 0,8. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 50 = 0,8(x - 50)$$

$$y = 0,8x + 10$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$   
CAS-laskimella.

- b)** Sijoitetaan suoran yhtälöön mittarilukema  $y = 120$  (km/h) ja ratkaistaan todellinen nopeus  $x$ .

$$y = 0,8x + 10$$

Sijoitetaan  $y = 120$ .

$$120 = 0,8x + 10$$

Ratkaistaan

CAS-laskimella.

$$x = 137,5 \approx 138 \text{ (km/h)}$$

Auton nopeus on 138 km/h.

- c)** Sijoitetaan suoran yhtälöön todellinen nopeus  $x = 30$  (km/h) ja lasketaan mittarilukema  $y$ .

$$y = 0,8x + 10$$

Sijoitetaan  $x = 30$ .

$$= 0,8 \cdot 30 + 10$$

$$= 34 \text{ (km/h)}$$

Mittari näyttää 34 km/h, kun auton todellinen nopeus on 30 km/h.

### Vastaus

**a)**  $y = 0,8x + 10$

**b)** 138 km/h

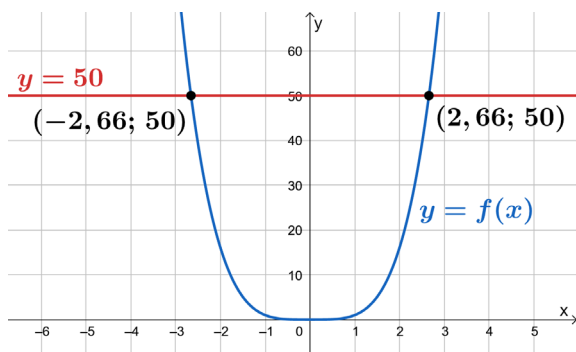
**c)** 34 km/h

## B6

a) Piirretään funktion  $f(x) = x^4$  kuvaaja geometriaohjelmalla.

Yhtälön  $x^4 = 50$  ratkaisut ovat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla funktion  $f$  arvo on 50. Etsitään kuvaajalta ne pisteet, joiden  $y$ -koordinaatti on 50.

Piirretään suora  $y = 50$ .



Määritetään funktion  $f$  kuvaajan ja suoran leikkauspisteet.

Leikkauspisteiden  $x$ -koordinaatit kahden desimaalin tarkkuudella ovat  $-2,66$  ja  $2,66$ .

Siis  $x^4 = 50$ , kun  $x \approx -2,66$  tai  $x \approx 2,66$ .

b) Luvun 50 neljäs juuri on yhtälön  $x^4 = 50$  positiivinen ratkaisu.

a-kohdan perusteella  $\sqrt[4]{50} \approx 2,66$ .

### Vastaus

a)  $x \approx -2,66$  tai  $x \approx 2,66$     b)  $\sqrt[4]{50} \approx 2,66$

## B7

- a) Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Merimetsoparien lukumäärä tuli siis joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Vuonna 2012 alle metsopareja oli 17 300. Neljän vuoden kuluttua vuonna määrä oli  $q^4 \cdot 17\,300$ .

Toisaalta vuonna 2016 metsopareja oli 25 500. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^4 \cdot 17\,300 = 25\,500 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q = 1,101852\dots \text{ tai } q = -1,101852\dots$$

$$q \approx 1,10185 \qquad q \approx -1,10185$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,10185$ .

Metsoparien lukumäärä tuli joka vuosi 1,10185-kertaiseksi, joten määrä vuoden lopussa oli aina 110,185 % edellisen vuoden lopun määrästä.

Merimetsokannan kasvu on ollut vuosittain keskimäärin  $110,185\% - 100\% = 10,185\% \approx 10,2\%$ .

- b) Metsoparien määrän  $x$  vuoden kuluttua vuodesta 2012 ilmaisee funktio  $f(x) = 17\,300 \cdot 1,10185^x$ .

Vuodesta 2012 vuoteen 2020 on kulunut 8 vuotta.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 8$  (vuotta).

$$f(8) = 17\,300 \cdot 1,10185^8 = 37\,585,9... \approx 37\,600 \text{ (kpl)}$$

Vuosi 2000 on 12 vuotta ennen vuotta 2012.

Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = -12$  (vuotta).

$$f(-12) = 17\,300 \cdot 1,10185^{-12} = 5402,2... \approx 5400 \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan metsopareja oli 37 600 vuonna 2020 ja 5400 vuonna 2000.

- c) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 1 000 000 (kpl).

$$f(x) = 1\,000\,000 \quad \text{Sijoitetaan } f(x) = 17\,300 \cdot 1,10185^x.$$

$$17\,300 \cdot 1,10185^x = 1\,000\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 41,829...$$

$$x \approx 41,8 \text{ (vuotta)}$$

Metsojen määrä kasvaa ajan kuluessa, joten määrä ylittää miljoonan vuonna  $2012 + 42 = 2054$ .

### Vastaus

a) 10,2 %

b) 37 600 vuonna 2020 ja 5400 vuonna 2000

c) 2054

## B8

Merkitään määrärahaa vuonna 2016 kirjaimella  $a$  (€) ja vuodesta 2021 eteenpäin vaikuttavaa vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ .

Vuosien 2016 ja 2021 välillä määrärahaa pienennettiin joka vuosi 5 %, joten yhdessä vuodessa määrärahat tulivat 0,95-kertaisiksi.

Vuonna 2021 vuodesta 2016 oli kulunut 5 vuotta, joten määräraha oli  $0,95^5 \cdot a$  (€).

Kolmen vuoden kuluttua vuonna 2024 määräraha on  $q^3 \cdot 0,95^5 \cdot a$  (€).

Toisaalta tavoitteena on korottaa rahat vuoden 2016 tasolle, joten määrärahan tulee olla  $a$  (€). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$q^3 \cdot 0,95^5 \cdot a = a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q = 1,0892\dots$$

$$\approx 1,089$$

Määrärahat tulevat joka vuosi 1,089-kertaisiksi, joten määräraha on aina 108,9 % edellisen vuoden määrärahasta.

Määrärahoja tulee korottaa vuodessa keskimäärin

$$108,9 \% - 100 \% = 8,9 \%$$

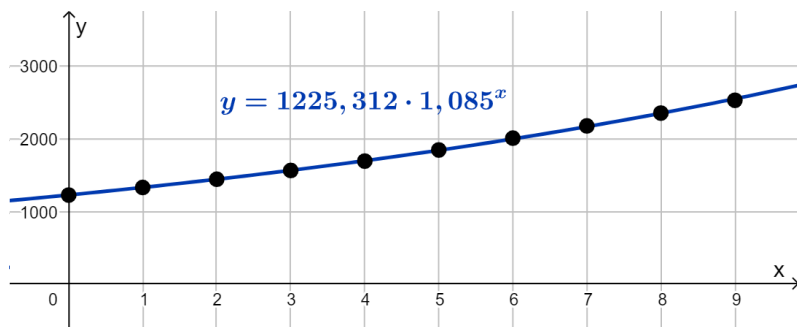
### Vastaus

8,9 %

## B9

- a) Muuttuja  $x$  on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina ja muuttuja  $y$  uusiutuvan energian maksimituotantokapasiteetti gigawatteina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika $x$ (v)	Energia $y$ (GW)
2	0	1224
3	1	1329
4	2	1442
5	3	1563
6	4	1693
7	5	1847
8	6	2010
9	7	2179
10	8	2356
11	9	2533



Uusiutuvan energian maksimikapasiteettia (GW) kuvaava eksponentiaalinen malli kolmen desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 1225,312 \cdot 1,085^x,$$

missä  $x$  on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina.

- b) Vuodesta 2010 vuoteen 2025 on  $2025 - 2010 = 15$  vuotta. Lasketaan funktion  $f$  arvo, kun  $x = 15$ .

$$f(15) = 1225,312 \cdot 1,085^{15} = 4165,745... \approx 4200 \text{ (GW)}$$

Kapasiteetti vuonna 2025 on noin 4200 GW.

- c) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $f$  arvo on 5000 (GW).

$$f(x) = 5000$$

$$f(x) = 1225,312 \cdot 1,085^x.$$

$$1225,312 \cdot 1,085^x = 5000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 17,237...$$

$$x \approx 17,2 \text{ (vuotta)}$$

Koska kapasiteetti kasvaa ajan kuluessa, ensimmäinen vuosi, jona kapasiteetti on yli 5000 GW on  $2010 + 18 = 2028$ .

### Vastaus

- a)  $f(x) = 1225,312 \cdot 1,085^x$
- b) 4200 GW
- c) 2028

## B10

Merkitään lomapaketin hintaa kirjaimella  $a$ , hotellikustannuksia alussa kirjaimella  $x$  ja matkakustannuksia alussa kirjaimella  $y$ .

Lomapaketin hintaa alussa kuvaa yhtälö  $a = x + y$ .

Hotellikustannukset laskivat 5 %, joten ne olivat muutosten jälkeen  $0,95x$ .

Matkakustannukset nousivat 18 %, joten ne olivat muutosten jälkeen  $1,18y$ .

Lomapaketin hinta säilyi samana, joten lomapaketin hintaa muutosten jälkeen kuvaa yhtälö  $a = 0,95x + 1,18y$ .

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} a = x + y \\ a = 0,95x + 1,18y \end{cases}$$

Ratkaistaan muuttujat  $x$  ja  $y$   
CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} x &= 7,8260...a \quad \text{ja} \quad y = 0,2173...a \\ &\approx 7,826a \quad \quad \quad \approx 0,217a \end{aligned}$$

Matkakustannukset alussa ovat  $y = 0,217a$ . Matkakustannukset olivat alussa siis 21,7 % lomapaketin hinnasta  $a$ .

### Vastaus

21,7 %